Observação sobre a questão 2 da 1P - SM (2011)

Temos que uma condição necessária para que o limite do quociente exista quando o limite do denominador é igual a zero é que o limite do denominador também seja igual a zero, mas observe que pelo exemplo abaixo que não é uma condição suficiente:

Vejamos um contra-exemplo:

Existem **NÚMEROS REAIS** a, b tais que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(ax+b-2)}{x^2} = L \neq 0?$$

Observe que o $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ se tomarmos b de maneira que $\lim_{x\to 0}(ax+b-2) = 0$ teremos que ter $b-2=0 \Rightarrow b=2$

Daí,

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{x}$$

Logo, se tomarmos $a > 0$ temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{a}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{a}{x} = -\infty$$

Se tomarmos $a < 0$ temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{a}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{a}{x} = \infty$$

E não podemos tomar $a = 0$ pois teríamos que $L = 0$.

Logo, não existem números reais a e b tais que

$$\lim_{x\to 0} \frac{(ax+b-2)}{x^2} = L \neq 0$$

Na verdade vale o seguinte resultado:

Observação 0.1. *Se* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *e existe* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ *então* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

Dem:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}g(x)\right) = \left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = (L)(0) = 0$$

podemos separar pois ambos os limites existem.