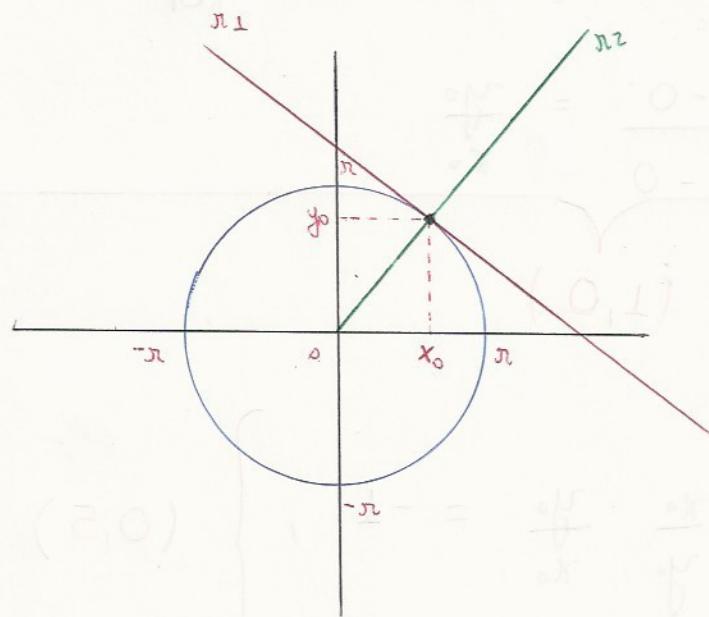


GabaritoSexta Manhã

Questão 1.



Sejam

r_1 : reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ no ponto (x_0, y_0)

r_2 : reta passando pelo ponto (x_0, y_0) e pela origem $(0,0)$.

Sejam m_1 e m_2 as declividades das retas r_1 e r_2 , respectivamente.

Como r_1 é a reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ no ponto (x_0, y_0) , segue que m_1 será dada por $y'(x_0)$.

(0,5)

Derivando a equação $x^2 + y^2 = r^2$ implicitamente com relação a x , obtemos

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dx} = \frac{d(r^2)}{dx}$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

(1,5)

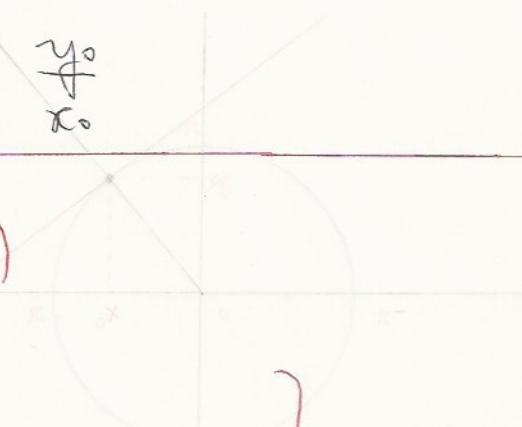
"Se errar a derivação de y^2 descontar 1,0 pt"

$$\text{Logo } m_1 = y'(x_0) = -\frac{x_0}{y_0} \quad (0,5)$$

Vigore, como π_2 é a reta passando pelos pontos (x_0, y_0) e $(0,0)$, sua declividade m_2 será dada por

$$m_2 = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0}$$

$(1,0)$



Aísim

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0} = -1, \quad \left. \right\} (0,5)$$

onde $\pi_1 \perp \pi_2$ // π_1 perpendicular

$(0,0)$

Questão 2: (6 pontos) Uma partícula se move ao longo da curva $y = \sqrt{x}$.

- 1 ponto) Calcule a distância da partícula a origem.

Resposta: Seja D a distância da origem $(0,0)$ a um ponto da curva $y = \sqrt{x}$.

$$D = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 + x}.$$

- 3 pontos) Qual a velocidade com que a partícula se distancia da origem, quando passa pelo ponto $(4, 2)$ e sua coordenada x aumenta na razão de 3cm/s ?

Resposta: Derivando D em relação a x temos

$$\frac{dD}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-1/2}(2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}. \text{(acertou até aqui vale 1 pto.)}$$

E como a velocidade $\frac{dx}{dt} = 3$ foi dada, pela regra da cadeia temos.

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dx} \frac{dx}{dt} \text{(usou regra da cadeia vale 1 pto.)}$$

logo

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}(3). \text{(acertou as contas vale 1 pto.)}$$

Calculando em $x = 4$ temos.

$$\frac{dD}{dt} = \frac{9}{2\sqrt{20}}(3) = \frac{27}{4\sqrt{5}}.$$

- 2 pontos) Supondo que $x(t) = 2t$, calcule a aceleração com que a partícula se distancia da origem em $t = 2$.

Resposta: Como $D(t) = \sqrt{x(t)^2 + x(t)}$ pela regra da cadeia temos

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Derivando novamente para obter a aceleração temos

$$\frac{d^2D}{dt^2} = \frac{d^2D}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{dD}{dx} \frac{d^2x}{dt^2}. \text{(acertou a regra da cadeia vale 1 pto.)}$$

Como $x(t) = 2t$ então $\frac{dx}{dt} = 2$ e $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, logo basta calcular $\frac{d^2D}{dx^2}$. Então

$$\begin{aligned}\frac{d^2D}{dx^2} &= \frac{4\sqrt{x^2+x} - 2(2x+1)^2/2\sqrt{x^2+x}}{4(x^2+x)} \\ &= \frac{4(x^2+x) - (2x+1)^2}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}.\end{aligned}$$

Em $t = 2$ temos $x(2) = 4$, logo a aceleração será

$$\frac{d^2D}{dt^2} = -\frac{1}{80\sqrt{20}}(4) = -\frac{1}{20\sqrt{20}} \text{ (acertou as contas vale 1 pto.)}$$

3. (solução alternativa)

Como $D(x) = \sqrt{x^2+x}$ e $x = x(t) = 2t$ temos:

$$D(t) = \sqrt{4t^2+2t} = (4t^2+2t)^{1/2}$$

Assim, $\frac{d^2D}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dD}{dt}\right) = \text{aceleração}$ } 1 ponto

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4t^2+2t}} \cdot (4t^2+2t)' = \frac{8t+2}{2\sqrt{4t^2+2t}} = \frac{4t+1}{\sqrt{4t^2+2t}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{4t+1}{\sqrt{4t^2+2t}} \quad \} 0,5 \text{ ponto}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{dD}{dt} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{4t+1}{\sqrt{4t^2+2t}} \right) \\
 &= \frac{(4t+1)' \sqrt{4t^2+2t} - (4t+1)(\sqrt{4t^2+2t})'}{(\sqrt{4t^2+2t})^2} \\
 &= \frac{4\sqrt{4t^2+2t} - (4t+1)[\frac{1}{2}(4t^2+2t)^{-\frac{1}{2}}(8t+2)]}{4t^2+2t} \\
 &= \frac{4\sqrt{4t^2+2t} - (4t+1)[\frac{1}{2}(4t^2+2t)^{-\frac{1}{2}}(8t+2)]}{4t^2+2t} \\
 &= \frac{4\sqrt{4t^2+2t} - (4t+1)[4t+1/\sqrt{4t^2+2t}]}{4t^2+2t}
 \end{aligned}$$

Para $t = 2$, $\frac{d^2D}{dt^2}(2) = \frac{4\sqrt{20} - 9[9/\sqrt{20}]}{20}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4\sqrt{20} - 81/\sqrt{20}}{20} \\
 &= -\frac{1}{20\sqrt{20}} \quad \left. \right\} 0,5 \text{ ponto}
 \end{aligned}$$