Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Lista 6: Derivada
Cálculo I - 04287 e 00508 - Professora: Mariana G. Villapouca

1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ em cada caso:

   (a) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$, $x_0 = \sqrt{5}$

   (b) $f(x) = \dfrac{x+4}{x+2}$, $x_0 = 0$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$

   (d) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$

2. Em cada caso, determine se f é contínua em $x = 1$ e se f é diferenciável em $x = 1$:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{2}, & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2}, & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

3. Determine a e b de modo que $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ ax+b, & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$ seja diferenciável em $x = 1$.

4. Seja f uma função tal que $|f(x)| \leqslant x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. f é contínua em $x = 0$? f é diferenciável em $x = 0$?

5. Em cada caso, use o gráfico da função para determinar os valores de x em que a função é diferenciável e indique os valores de x em que a derivada é **(i)** nula (pontos críticos de f: candidatos a máximos e mínimos locais), **(ii)** positiva (onde a função é crescente) e **(iii)** negativa (onde a função é decrescente).

   (a) $f(x) = |x+3|$

   (b) $f(x) = |x^2 - 9|$

   (c) $f(x) = \sqrt{|x|}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x \leqslant 0 \\ 4 - x^2, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

6. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{se } x < 0 \\ sen(x), & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$. Prove que f é contínua em $x = 0$, mas que f não é diferenciável em $x = 0$ utilizando as derivadas laterais.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{se } x < 1 \\ 1 + ax + bx^2, & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$. Determine a e b de maneira que f seja diferenciável. (Justifique a sua escolha através das derivadas laterais).

8. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{4} - 1, & \text{se } x \leqslant 1 \\ arctg(x), & \text{se } x > 1 \end{cases}$.
   Caso, existam, calcule $f'(1)$ e $f''(1)$. (Dica: Use a Regra de L'Hôspital para calcular as derivadas laterais no ponto $x = 1$).

9. Considere $g(x) = (cos(x)) \cdot f^2(x)$ onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável, $f(0) = -1$, $f'(0) = f''(0) = 2$. Calcule $g''(0)$.

10. Sejam $f(x) = \sqrt{2x+1}$ e $g(x) = \sqrt{tg(x)}$. Calcule $(f \circ g)'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

11. Prove que se f é diferenciável em x_0, então f é contínua em x_0.

12. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$. A função f é diferenciável em $x = 0$? A função f' é contínua em $x = 0$?

13. Seja $f(x) = \begin{cases} x \cdot sen\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$. f é contínua em $x = 0$? f é diferenciável em $x = 0$?

14. Seja $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot sen\left(\dfrac{1}{x^4}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Calcule $f'(x)$.

15. Sejam $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & \text{se } x < 1 \\ 2 - x^2, & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$ e $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$.

    (a) Determine $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$.

    (b) Calcule $(f \circ g)'(x)$ e $(g \circ f)'(x)$.

16. Encontre a derivada das seguintes funções:

    (a) $f(x) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) \cdot tg(x)$

    (b) $f(x) = cos^2(sec(x))$

    (c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot sen(x) + x^{\frac{1}{3}}$

    (d) $f(x) = 2x \cdot cos(x) \cdot tg(x)$

    (e) $f(x) = \dfrac{x \cdot sec(x)}{x^2 + 2x + 3}$

    (f) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^4 + x^2 + 1}$

    (g) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 2)^{100}}$

    (h) $f(x) = |2x - 8|$, $x \neq 4$

    (i) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x^4 + 2x}}{cos^2(3x)}$

    (j) $f(x) = sen(cos(\sqrt{3x + 1}))$

    (k) $f(x) = sen(cos(x^2 + 1))$

    (l) $f(x) = ln(|x|)$

    (m) $f(x) = ln\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)$

    (n) $f(x) = tg^{23}(x^2 + 1)$

    (o) $f(x) = \sqrt{x^3 + cossec(x)}$

    (p) $f(x) = (1 + x^5 cotg(x))^{-8}$

    (q) $f(x) = sec(\sqrt{1 + cos(x)})$

    (r) $f(x) = e^{sen(x^2+1)}$

    (s) $f(x) = log_{10}(2 + sen(x))$

    (t) $f(x) = tgh(sen(x))$

    (u) $f(x) = senh(ln(2x)) + cosh(ln(2x))$

17. Prove que:

    (a) $D_x(e^x) = e^x$

    (b) $D_x(a^x) = a^x \cdot ln(a)$

    (c) $D_x(ln(x)) = \dfrac{1}{x}, x > 0$

    (d) $D_x(log_a(x)) = \dfrac{1}{x \cdot ln(a)}$

    (e) $D_x(sen(x)) = cos(x)$

    (f) $D_x(cos(x)) = -sen(x)$

    (g) $D_x(tg(x)) = sec^2(x)$

(h) $D_x(cotg(x)) = -cossec^2(x)$

(i) $D_x(sec(x)) = sec(x) \cdot tg(x)$

(j) $D_x(cossec(x)) = -cossec(x) \cdot cotg(x)$

(k) $D_x(senh(x)) = cosh(x)$

(l) $D_x(cosh(x)) = senh(x)$

18. Seja g uma função diferenciável. Encontre a derivada das funções abaixo:

(a) $f(x) = e^{g(x)}$

(b) $f(x) = ln(g(x))$

(c) $f(x) = cos(g(x))$

(d) $f(x) = sen(g(x))$

(e) $f(x) = (g(x))^n$

(f) $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

19. Considere f uma função diferenciável e g definida por $g(x) = f^2(cos(x))$. Sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = -\frac{1}{2}$, calcule $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

20. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, $g(0) = \frac{1}{2}$ e $g'(0) = 1$. Calcule $f'(0)$, onde

$$f(x) = (cos(x)) \cdot g^2\left(tg\left(\frac{x}{x^2+2}\right)\right).$$

21. Sejam g diferenciável e $f(x) = x \cdot g(x^2)$.

(a) Mostre que $f'(x) = g(x^2) + 2x^2 \cdot g'(x^2)$.

(b) Calcule $g(4)$, sabendo que $g(4) + g'(4) = 1$ e $f'(2) = -1$.

22. Calcule f'' e seu respectivo domínio para $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

23. Seja $y = u \cdot cos^2(u^3)$.

(a) Calcule $\dfrac{dy}{du}$.

(b) Se $u = u(x)$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{dy}{dx}\right]$.

24. Prove que se $y = cos(\sqrt{x}) - sen(\sqrt{x})$, então $4xy'' + 2y' + y = 0$.