

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Lista 3: Limite e continuidade

Cálculo I - 04287 e 00508 - Professora: Mariana G. Villapouca

1. Calcule, caso exista, o $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ para cada função abaixo. Caso não exista, explique o porquê.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } x < 1 \\ x - 2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ 2x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

2. Prove, usando a definição formal de limite, que $\lim_{x \rightarrow a} k = k$ para $k \in \mathbb{R}$ constante e que $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Prove, usando as propriedades de limite, que $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ é um polinômio de grau n .
4. Dê um exemplo de uma função f na qual $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$ existe, mas $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.
5. Defina $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Calcule $f'(a)$ em cada caso:

(a) $f(x) = x^2$ e $a = 2$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $a = 1$.

6. Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(x^2 \cdot \cos \left(\frac{1}{x-1} \right) - \cos \left(\frac{1}{x-1} \right) \right)$. Existe $\lim_{x \rightarrow 1} \cos \left(\frac{1}{x-1} \right)$?
7. Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cdot \cos \left(\frac{1}{x^2} \right)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left(\frac{1}{x^2} \right)$. Caso não exista, explique o porquê.
8. Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ onde $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Teorema da "Simplificação". *Sejam f e g duas funções tais que*

$$f(x) = g(x), \quad \forall (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \subset \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

para algum $\delta > 0$. Então,

$$\text{se } \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

9. Calcule os seguintes limites usando o Teorema da "Simplificação":

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 9}}$

- (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{\sqrt{x^2-4}}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + x^2 - x - 1}$ (dica: fatore os polinômios)
- (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{256 \cdot (\sqrt[3]{x} - 2)}{x^3 - 8^3}$ (Não se esqueça de provar que $((\sqrt[3]{x})^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 4) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.)
- (f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2-2x} - 2}{1 + \sqrt[3]{x}}$ (dica: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$)
- (g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ (primeiro exercício da lista de pré-cálculo)
- (h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{|x-1|}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(1-x^2) - 2(1-x^3)}{(1-x^3)(1-x^2)}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{x}$
- (k) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
- (l) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
- (m) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2 - t^2}{h}$

Observação.

$$f \text{ é contínua em } a \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

10. Sejam f e g duas funções contínuas em $a \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ e $k \in \mathbb{R}$ constante. Prove que:

- (a) $k \cdot f$ é contínua em a
- (b) $f + g$ é contínua em a
- (c) $f \cdot g$ é contínua em a
- (d) $\frac{f}{g}$ é contínua em a se $g(a) \neq 0$

11. Analise a continuidade das funções básicas apresentadas no início deste curso.

Observação.

f é descontínua em $a \Leftrightarrow f$ não é contínua em a ($a \notin \text{Dom}(f)$) ou $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

Diremos que um ponto a é uma **descontinuidade removível** se

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

12. A função $g(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ é contínua em $x = 0$? Se é descontínua em $x = 0$, essa descontinuidade é removível?
13. Seja f uma função tal que $|f(x)| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Prove que f é contínua em $x = 0$.
14. Seja $h(x) = x^2 \cdot g(x)$ onde $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. A função h é contínua em $x = 0$?
15. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ 2x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. A função f é contínua em \mathbb{R} ? Caso negativo, quais são os pontos de descontinuidade? Essas descontinuidades são removíveis?
16. Quais os pontos onde $f(x) = \frac{|x|}{x}$ é contínua? Se houver descontinuidades, estas são removíveis?
17. Sabemos que $x = 2$ é um ponto de descontinuidade da função $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ (Por quê?). Essa descontinuidade é removível?
18. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } |x| < 1 \\ 1 - x^2, & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$. Quais são os pontos onde f é contínua? Existem pontos de descontinuidade? Se existirem descontinuidades, elas são removíveis?
19. Seja $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1}, & \text{se } x \leq -1 \\ a \cdot x + b, & \text{se } -1 < x < 0 \\ |x^2 - 1|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Qual o domínio da f ? Existem valores reais a e b tais que a função f seja contínua em seu domínio? Em caso afirmativo, determine esses valores usando os **limites laterais**. (Geometricamente é fácil verificar tal escolha, mas atenção ao que foi pedido. Portanto, neste exercício deve-se justificar a escolha de a e b através dos limites laterais). Esboce o gráfico da f .
20. Dê um exemplo com duas funções f e g tais que f seja contínua em $x = 0$, g seja descontínua em $x = 0$, mas no entanto $f \cdot g$ seja contínua em $x = 0$.
21. Seja $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{2-x}, & \text{se } x < 1 \\ a \cdot x + b, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ |x^2 - 7x + 12|, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$. Determine o domínio de f . Existem valores reais a e b de modo que f seja contínua em $x = 1$? E em $x = 2$? Justifique usando os limites laterais. A função é contínua em $\mathbb{R} - \{1, 2\}$? Existem descontinuidades? Existem descontinuidades removíveis? Esboce o gráfico da f .
22. Seja $g(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{se } x > 0 \\ a, & \text{se } x = 0 \\ x + 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$. A função g é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$? Existe algum $a \in \mathbb{R}$ tal que g seja contínua em $x = 0$? Em caso afirmativo, determine-o. Quais são os valores de a tais que g é descontínua em $x = 0$? Quais são os valores de a tais que a é uma descontinuidade removível? (Justifique usando os limites laterais). Esboce o gráfico de g .
23. Dê um exemplo de duas funções descontínuas cuja soma seja contínua.

Teorema do Valor Intermediário (T.V.I.). *Se f é contínua em um intervalo $[a, b]$ e $[f(a) < d < f(b)$ ou $f(b) < d < f(a)]$, então existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Observação (Corolário do T.V.I.). *Se f é contínua em um intervalo $[a, b]$ e $[f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(b) < 0 < f(a)]$, então existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

24. Prove que existe um ponto de interseção entre o gráfico de $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ e o gráfico de $g(x) = 2x^2 - x + 2$ no intervalo $[0, 1]$.
25. Verifique, usando o T.V.I., que existe pelo menos uma raiz real de $x^3 - 3x + 1$ em $(0, 1)$.
26. Mostre que a função $f(x) = 1 - 2x^2 - \arctg(x)$ atinge o valor $\frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 1]$.
27. Mostre que existe um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que
 - (a) $\text{sen}(x_0) - x_0 + 1 = 0$
 - (b) $x_0^7 + x_0^5 + 1 = 0$
28. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } |x| < 2 \\ -|x|, & \text{se } |x| \geq 2 \end{cases}$. Verifique que:
 - (a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
 - (b) $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$
 - (c) $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Explique a razão desse exemplo não contradizer o Teorema do Valor Intermediário. (Dica: Para visualizar melhor o que está ocorrendo, esboce o gráfico de f).