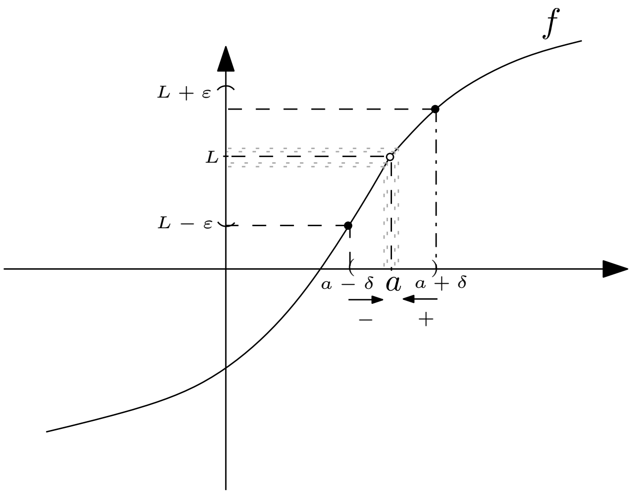
**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

**Cálculo I e Cálculo Diferencial I - Professora: Mariana G. Villapouca**

**Aula 2 - Limite e continuidade**

**Ideia intuitiva:** Dizemos que o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ é igual a $L$, e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se os valores $f(x)$ estão tão próximos quanto se queira de $L$, quando fazemos os valores de $x$ suficientemente próximos de $a$.




$$x > a$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

$$x < a$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

1. **Definição de limite**

**Definição 1** (Limite)**.** Dizemos que o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ é igual a $L$, isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

se para todo intervalo da forma $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, existe um intervalo da forma $(a-\delta, a+\delta)$ tal que

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a+\delta) \subset Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Em outras palavras, $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \text{ e } x \in Dom(f) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**Observação 1.** $\boxed{\textit{Dizemos que uma função } f \textit{ é contínua em } a \in Dom(f) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$

**Teorema 1** (Unicidade do limite)**.** *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, *então* $L_1 = L_2$.

*demonstração:* Tome $\varepsilon > 0$ qualquer. Temos que

- Como $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta_1$, então $|f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- Como $\lim_{x\to a} f(x) = L_2 \Rightarrow \exists \delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta_2$, então $|f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Assim se tomarmos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, tem-se que para cada $x \in Dom(f)$

- se $0 < |x-a| < \delta$, então $|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leqslant |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Logo, $L_1 = L_2$. ■

2. **Limites laterais**

**Definição 2** (Limite à direita)**.** Dizemos que o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ pela direita é igual a $L$, isto é,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

se para todo intervalo da forma $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe um intervalo da forma $(a, a + \delta) \subset Dom(f)$ tal que

$$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Em outras palavras, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in Dom(f)$ e

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**Definição 3** (Limite à esquerda)**.** Dizemos que o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ pela esquerda é igual a $L$, isto é,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

se para todo intervalo da forma $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe um intervalo da forma $(a - \delta, a) \subset Dom(f)$ tal que

$$x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Em outras palavras, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in Dom(f)$ e

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**Teorema 2.** *Temos que* $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, *se e somente se,* $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *e* $\exists \delta > 0$ *tal que* $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \subset Dom(f)$.

*demonstração:*

($\Rightarrow$) Se $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se

$$x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \subset Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Logo, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

- $x \in (a - \delta, a) \subset Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$
- $x \in (a, a + \delta) \subset Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

($\Leftarrow$) Se $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ então para todo $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

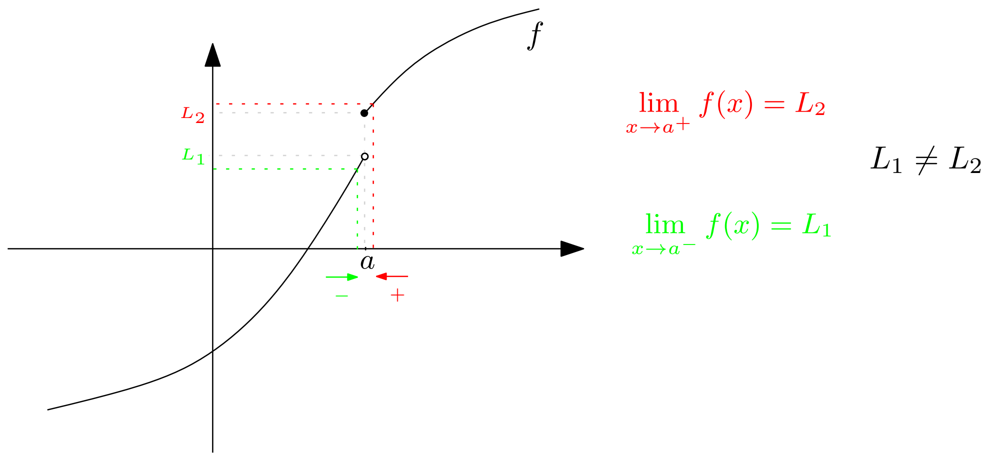
- $x \in (a, a + \delta_1) \subset Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

− $x \in (a-\delta_2, a) \subset Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Assim, tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, temos que se $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f)$, então $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Portanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

$\blacksquare$

**Observação 2.** *Nem sempre os limites laterais existem e nem sempre quando os limites laterais existem eles coincidem.*



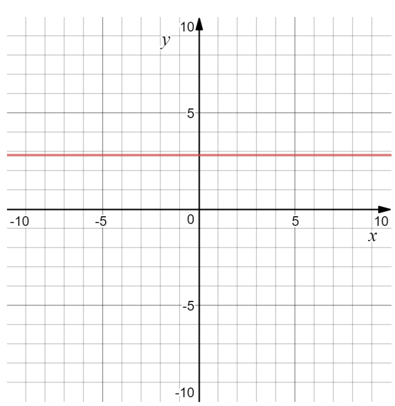

**Observação 3.**

*(a)* *Se* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, *então* $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

*(b)* *Se* $\nexists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *ou* $\nexists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *e* $Dom(f)$ *contém uma vizinhança da forma* $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, *então* $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

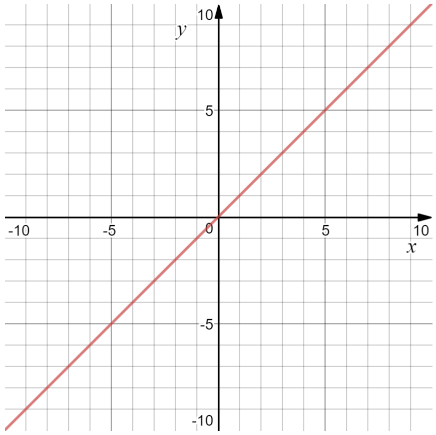
## 3. Limite de algumas funções básicas

**Função constante:** Seja $f(x) = K$, onde $K \in \mathbb{R}$ é constante.



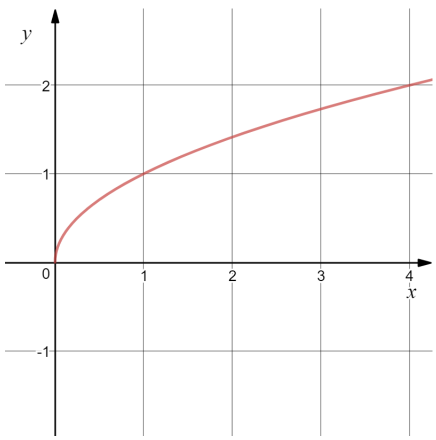

$\lim\limits_{x\to a} K = K = f(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

**Função linear:** Seja $f(x) = x$.



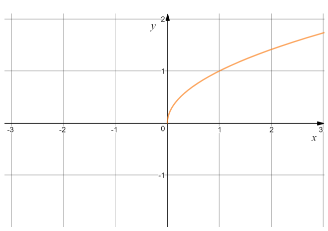

$$\lim_{x \to a} x = a = f(a),\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

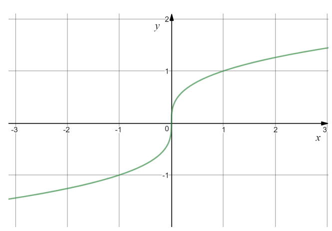
**Função raiz quadrada:** Seja $f(x) = \sqrt{x}$.




$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} = f(a),\ \forall a \in [0, +\infty).$$

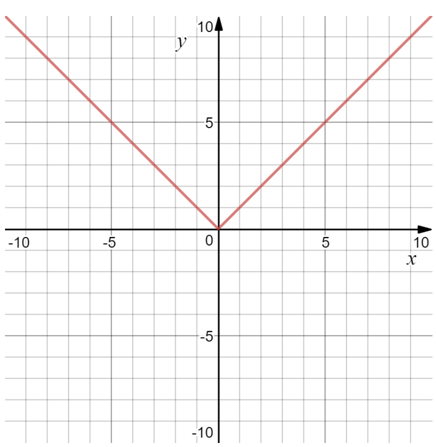
**Função raiz n-ésima:** Seja $f(x) = \sqrt[n]{x}$ onde $n = 2, 3, 4, \ldots$.





$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} = f(a), \forall a \in Dom(\sqrt[n]{x}).$$

**Função modular:** Seja $f(x) = |x|$.




$$\lim_{x \to a} |x| = |a| = f(a),\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

4. **Propriedades do limite**

Sejam $f, g$ duas funções tais que existem os limite $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ e $K \in \mathbb{R}$ uma constante, então:

(a) $\lim_{x\to a} K \cdot f(x) = K \lim_{x\to a} f(x) = K \cdot L_1$

(b) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

(c) $\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 L_2$

(d) $\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

(e) $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = (L_1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(f) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e se $L_1 \in Dom(\sqrt[n]{x})$.

(g) $\lim_{x\to a} ln(f(x)) = ln(\lim_{x\to a} f(x)) = ln(L_1)$ se $L_1 \in Dom(ln(x))$.

(h) $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L_1|$

*demonstração:*

(a) Dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$ então

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{|K|}$$

Assim, se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$ então

$$|K \cdot f(x) - K \cdot L_1| = |K| \cdot |f(x) - L_1| < |K| \cdot \frac{\varepsilon}{|K|} = \varepsilon.$$

(b) Dado $\varepsilon > 0$,

- existe $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$
- existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_2) \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

Tomando $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, tem-se que se $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ então

$$|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| \leqslant |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(c) Dado $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ $(n \in \mathbb{N})$

- existe $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{1}{n}$
- existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_2) \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{1}{n}$

Tome $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, se $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ então

$$\begin{aligned}
|f(x) \cdot g(x) - L_1 \cdot L_2| &= |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot L_2 + f(x) \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| \\
&= |f(x)[g(x) - L_2] + L_2[f(x) - L_1]| \\
&\leqslant |f(x)| \cdot |g(x) - L_2| + |L_2| \cdot |f(x) - L_1| \\
&\leqslant |f(x)| \cdot \frac{1}{n} + |L_2| \cdot \frac{1}{n} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{n} + |L_1|\right) \cdot \frac{1}{n} + |L_2| \cdot \frac{1}{n} \\
&\leqslant \frac{1}{n^2} + |L_1| \cdot \frac{1}{n} + |L_2| \cdot \frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 0
\end{aligned}$$

pois $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \dfrac{1}{n} \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{1}{n} + |L_1|$.

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x) - L_1 \cdot L_2) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$.

(d) Dado $\varepsilon > 0$

- existe $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$
- existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2) \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$
- existe $\delta_3 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_3, a) \cup (a, a+\delta_3) \Rightarrow |L_2^2| - |g(x) \cdot L_2| \leqslant |g(x)L_2 - L_2^2| < \dfrac{L_2^2}{2}$.

  Daí, tem-se que $\dfrac{1}{|g(x)L_2|} < \dfrac{L_2^2}{2}$ para todo $x \in (a-\delta_3, a) \cup (a, a+\delta_3)$.

Tome $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$. Assim, se $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ então

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_1}{L_2}\right| = \left|\frac{L_2 f(x) - L_1 g(x)}{g(x)L_2}\right| = |L_2 f(x) - L_1 g(x)| \cdot \frac{1}{|g(x)L_2|} \leqslant |L_2 f(x) - L_1 g(x)| \cdot \frac{L_2^2}{2} \overset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{L_1}{L_2}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

Os itens (e), (f), (g) e (h) são consequências da continuidade das funções $x^n$, $\sqrt[n]{x}, ln(x)$ e $|x|$ junto com a propriedade da composta que veremos posteriormente. ■

**Observação 4.** *Todas as propriedades listadas acima também são válidas para* $\lim\limits_{x \to a^+}$ *e* $\lim\limits_{x \to a^-}$ *fazendo as alterações necessárias.*

***Exercício:*** Prove, usando as propriedades acima, que para todo $a \in \mathbb{R}$, temos que $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$, onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é um polinômio de grau $n$ qualquer.

**Observação 5.** *Se* $y = g(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, *então*

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = \lim_{y \to b} f(y).$$

**Teorema 3** (do Confronto)**.** *Sejam* $f, g$ *e* $h$ *três funções tais*

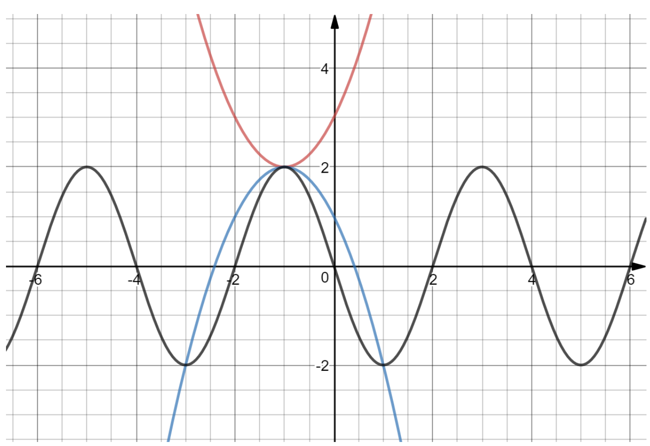
$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

*para todo* $x \in (a-\delta, a) \cup (a+\delta) \subset (Dom(f) \cap Dom(g) \cap Dom(h))$. *Se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

*então*

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$



*demonstração:* Dado $\varepsilon > 0$ temos que

- $\exists \delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$
- $\exists \delta_2 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1) \Rightarrow h(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Assim, tomando $\delta_0 = min\,\{\delta_1, \delta_2, \delta\}$ obtemos que

- se $x \in (a-\delta_0, a) \cup (a, a+\delta_0) \Rightarrow L-\varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L+\varepsilon$

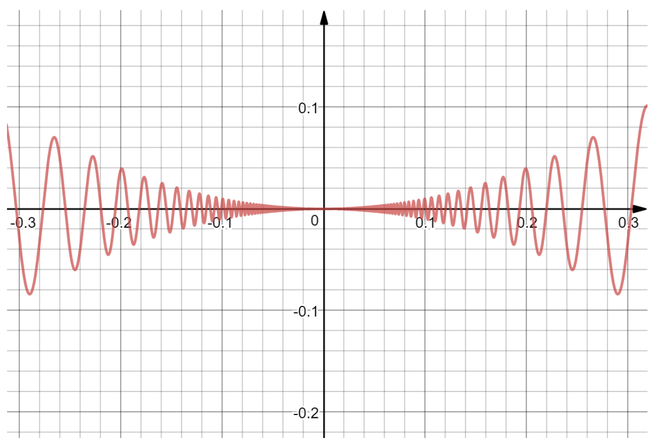
Portanto, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$. ■

**Corolário 1** (Teorema do anulamento)**.** *Sejam $f$ e $g$ funções. Se*

*(a)* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

*(b)* $-M \leqslant g(x) \leqslant M$ *para todo* $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f)$

*então,* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0.$




*demonstração:* Dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1)$ então $|f(x)| = |f(x) - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.
Tome $\delta_2 = min\,\{\delta_1, \delta\}$. Daí, se $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2)$ então

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0$. ■

**Teorema 4** (da "Simplificação")**.** *Sejam $f$ e $g$ duas funções tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f) \cap Dom(g)$ para algum $\delta > 0$. Então,*

$$se\ \exists \lim_{x\to a} g(x) \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x) \ \ e \ \ \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

*demonstração:* Tome $\varepsilon >$ qualquer. Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ então $\exists \delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1)$ então $|g(x) - L| < \varepsilon$. Tomando $\delta_2 = min\,\{\delta, \delta_1\} > 0$, obtemos que se $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2)$ então

- $f(x) = g(x)$
- $|g(x) - L| < \varepsilon$

Logo, $|f(x) - L| = |g(x) - L| < \varepsilon$ se $x \in (a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_2)$.

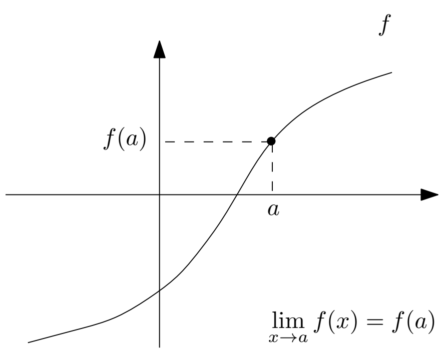
Portanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. ■

5. **Continuidade**

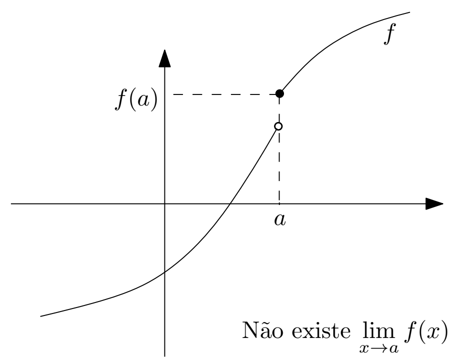
**Definição 4.** Sejam $f$ uma função e $a$ um ponto no domínio de $f$. Dizemos que

$$\boxed{f \text{ é contínua em um ponto } a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

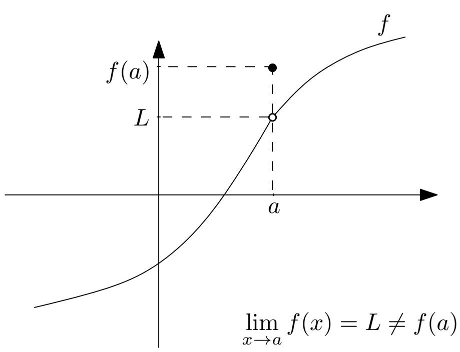
Se $f$ não é contínua em um ponto $a$, dizemos que $f$ é descontínua em $a$. Um ponto de descontinuidade $a$ é removível se $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. Dizemos que uma função $f$ é contínua se ela é contínua em todos os pontos do seu domínio e é contínua em um intervalo $I$ se ela é contínua em cada ponto deste intervalo $I$.



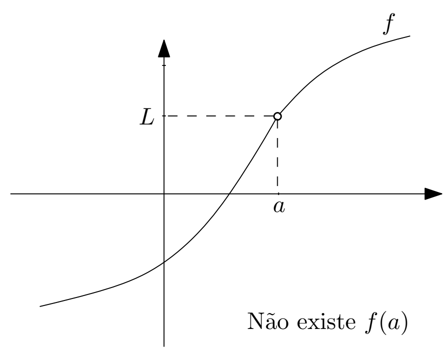

$f$ é contínua em $a$




$f$ é descontínua em $a$




$f$ é descontínua em $a$




$f$ é descontínua em $a$

**Propriedades:** Sejam $f$ e $g$ duas funções contínuas em um ponto $a \in Dom(f) \cap Dom(g)$ e $K$ uma constante, então:

(a) $K \cdot f$ é contínua em $a$,

(b) $f + g$ é contínua em $a$,

(c) $f \cdot g$ é contínua em $a$,

(d) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em $a$ se $g(a) \neq 0$.

*demonstração:* Exercício!