Na seção 3 desta aula vimos que:

- A função constante é contínua em $\mathbb{R}$.
- A função linear é contínua em $\mathbb{R}$.
- A função raiz quadrada é contínua em $[0, +\infty)$.
- A função raiz n-ésima é contínua em seu domínio.
- A função modular é contínua em $\mathbb{R}$.
- A função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.

Observação. *As funções exponencial, logarítmica e as trigonométricas são contínuas em seus domínios.*

Teorema 1 (limite da composta)**.** Sejam f e g duas funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e g é contínua no ponto b. Então:

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

Em particular, se no teorema acima tivermos $b = f(a)$, isto é, se f é contínua em a teremos o seguinte:

Teorema 2 (Continuidade da composta)**.** Sejam f e g duas funções. Se g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então $f \circ g$ é contínua em a. Isto é, se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(g(a))$, então

$$\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = (f \circ g)(a).$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & g(x) \arrow[r, mapsto, "f"] & f(g(x)) \end{tikzcd}$$

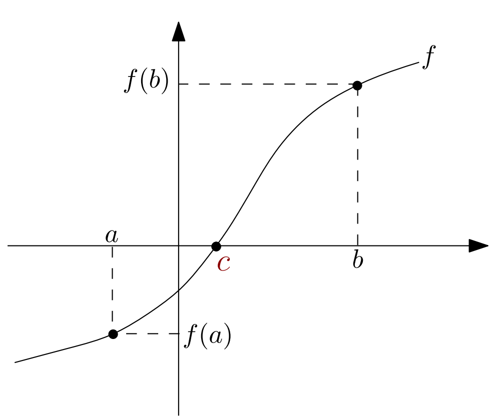
Definição 1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, diremos que f é contínua em $[a, b]$ se:*

(a) f *é contínua em* (a, b)

(b) $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

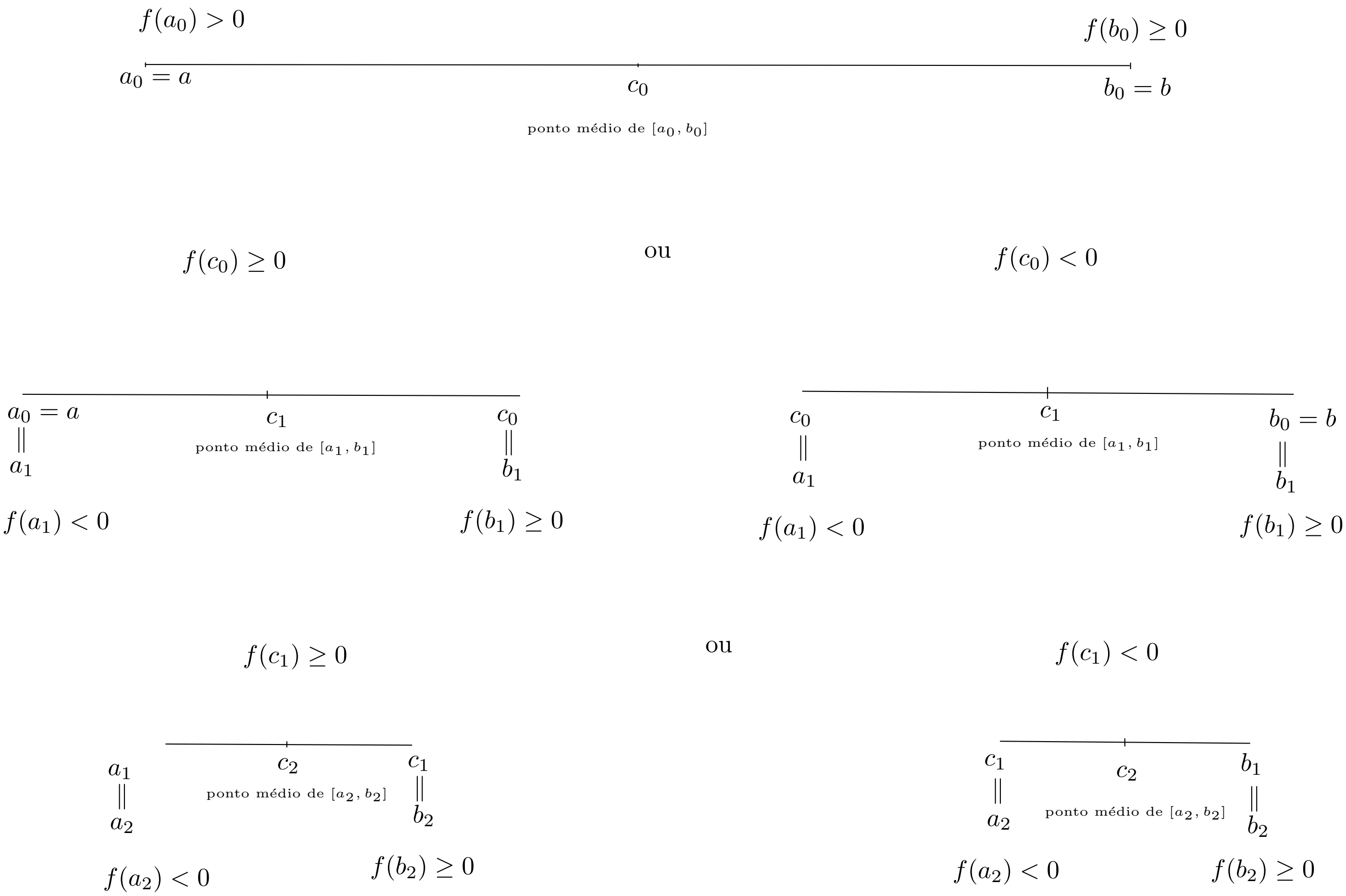
(c) $\exists \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

Teorema 3 (de Bolzano)**.** *Se f é contínua em $[a, b]$, $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais contrários, então existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*



demonstração:

Caso1: $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$



$$\vdots$$

Assim, temos que $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots [a_n, b_n] \supset \cdots$ onde $f(a_i) < 0$ e $f(b_i) \geqslant 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Logo, pelo Teorema do intervalos encaixantes, existe $c \in \bigcap_{i=0}^{+\infty} [a_i, b_i]$, isto é, existe um c tal que $a_n \leqslant c \leqslant b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por um lado, temos, pela construção dos intervalos, que

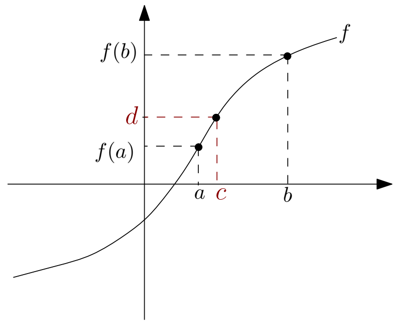
$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}| = \frac{1}{2}\frac{1}{2}|b_{n-2} - a_{n-2}| = \cdots = \frac{1}{2^n}|b_0 - a_0| = \frac{1}{2^n}|b - a| \to 0$$

quando $n \to +\infty$. Portanto, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$ e, pelo Teorema do confronto, temos também que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c$.

Por outro, pela continuidade de f tem-se que $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$, logo devemos ter que $f(c) < 0$ e $f(c) \geqslant 0$, portanto $f(c) = 0$.

O caso 2 onde $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ é análogo. ∎

Teorema 4 (do Valor Intermediário)**.** *Se uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e se d é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.*



demonstração: Caso 1: $f(a) < d < f(b)$.

Como $g(x) = f(x) - d$ é contínua em $[a, b]$, $g(a) = f(a) - d < 0$ e $g(b) = f(b) - d > 0$, temos, pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, isto é, $g(c) = f(c) - d = 0 \Rightarrow f(c) = d$.

Caso 2: $f(a) > d > f(b)$ é análogo ao caso 1. ■

Observação. *Uma aplicação é a garantia da existência de raízes de algumas equações.*

Teorema 5 (de Weierstrass ou Teorema do Valor extremo)**.** *Se f é contínua em $[a, b]$, então existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que*

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \forall x \in [a, b].$$

demonstração:

Como f é contínua em $[a, b]$ (intervalo fechado e limitado), então f é limitada em $[a, b]$. Sejam

- $M = sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$
- $m = inf \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$

Logo,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \forall x \in [a, b]$$

Afirmação: Existe $x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_2) = M$.

Suponha, por absurdo, que $f(x) < M, \forall x \in [a, b]$, então a função $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ é contínua em $[a, b]$. Daí, temos que g é limitada em $[a, b]$, logo existe um $\beta > 0$ tal que

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < \beta, \forall x \in [a, b]$$

daí $f(x) < M - \dfrac{1}{\beta} < M = sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}, \forall x \in [a, b]$, contrariando o fato de M ser supremo de $f(x)$ em $[a, b]$.

Portanto existe $x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_2) = M$.

Afirmação: Existe $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) = m$ é análoga.

■

6. <u>**Limite infinito**</u>

Definição 2 (Limite infinito)**.** *Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a $+\infty$, isto é,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

se para todo número positivo M, existe um intervalo da forma $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)\subset Dom(f)$ tal que

$$x \in (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > M.$$

E dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a $-\infty$, isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

se para todo número negativo M, existe um intervalo da forma $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$ tal que

$$x \in (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < M.$$

Observação. *De maneira semelhante definimos*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty, \quad e \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty,$$

mudando o intervalo para $(a, a+\delta)$ e $(a-\delta, a)$, respectivamente, na definição anterior.

Observação (Atenção!!!)**.** *O limite de $f(x)$ quando $x\to a$ ou a^- ou a^+ ser igual à $+\infty$ ou $-\infty$ significa que o limite não existe!*

<u>**Propriedades:**</u>

(a) Se $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}-\{0\}$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então:

- $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se existe um $\delta > 0$ tal que $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0, \forall x \in (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$,
- $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ se existe um $\delta > 0$ tal que $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0, \forall x \in (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$.

(b) Se $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$ e $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$ ou $-\infty$, então:

- $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = L \pm \infty = \pm\infty$
- Se $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, então

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot(+\infty) = \begin{cases} \infty, & L>0 \\ -\infty, & L<0 \\ \text{indeterminado}, & L=0 \end{cases}$$

- Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, então

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot(+\infty) = \begin{cases} -\infty, & L>0 \\ +\infty, & L<0 \\ \text{indeterminado}, & L=0 \end{cases}$$

- Se $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$
  - $\lim_{x\to a}[g(x) + h(x)] = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$
  - $\lim_{x\to a}[g(x) \cdot h(x)] = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
- Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$
  - $\lim_{x\to a}[g(x) + h(x)] = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$
  - $\lim_{x\to a}[g(x) \cdot h(x)] = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$
  - $-\infty + (+\infty) = \infty - \infty$ é indeterminado!!!!!
  - $\lim_{x\to a}[g(x) \cdot h(x)] = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

Atenção!!!! Cuidado com as indeterminações: $\dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}, \infty - \infty, \infty \cdot 0, 0^0, 1^\infty$ e ∞^0 essas expressões nada dizem sobre o limite!!!!

7. **Limite no infinito**

Definição 3. *Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ é igual a L, isto é,*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

se para todo intervalo da forma $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, existe um número positivo N tal que

$$x > N \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

E dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a $-\infty$ é igual a L, isto é,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L,$$

se para todo intervalo da forma $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, existe um número negativo N tal que

$$x < N \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Propriedades:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{K}{x^n} = 0, n \in \mathbb{N}$ e $K \in \mathbb{R} - \{0\}$

(b) Se $K \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, então $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{K}{f(x)} = 0$

(c) Se existem $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$ e $K \in \mathbb{R}$, então
  - $\lim_{x\to\pm\infty} (Kf(x) + g(x)) = K \lim_{x\to\pm\infty} f(x) + \lim_{x\to\pm\infty} g(x)$
  - $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot g(x) = (\lim_{x\to\pm\infty} f(x)) \cdot (\lim_{x\to\pm\infty} g(x))$
  - $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)}$ se $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) \neq 0$.

8. **Assíntotas verticais e horizontais**

Definição 4 (Assíntota vertical)**.** *Uma reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função f se*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty, \quad e/\ ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Definição 5 (Assíntota horizontal)**.** *Uma reta $y = L$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico de uma função f se*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L.$$

9. **Limites Fundamentais**

Primeiro limite fundamental: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1}$

Exercício: Prove que $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x)}{x} = 0$ usando o limite fundamental acima.

Segundo limite fundamental: $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$

Terceiro limite fundamental: Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln(a)}$