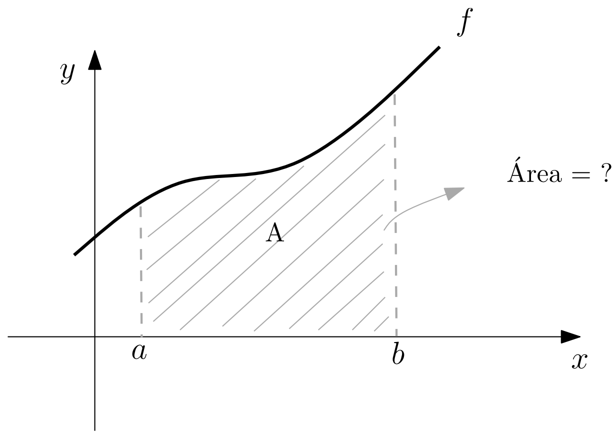
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

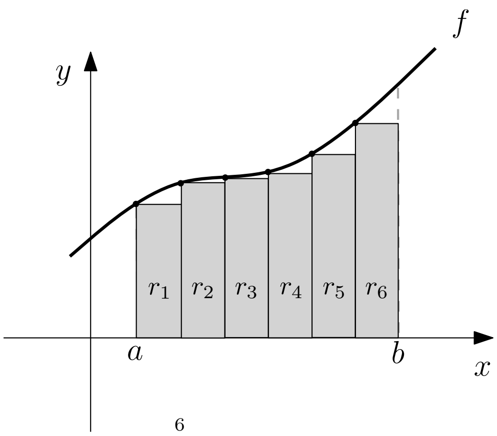
Cálculo I e Cálculo Diferencial I - Professora: Mariana G. Villapouca

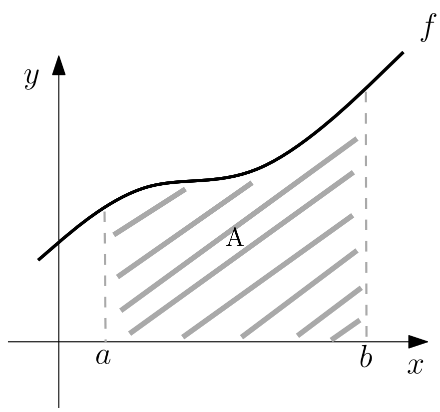
Aula 6 - Integral Definida

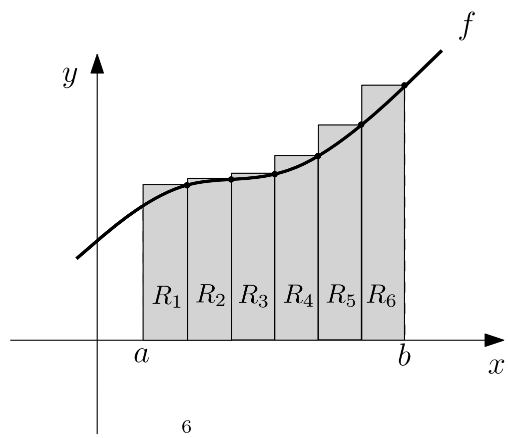
O problema da área: Dada uma função contínua e positiva em um intervalo $[a, b]$ como encontrar a área abaixo do seu gráfico?



Para resolver isso iremos montar uma **aproximação por retângulos**:



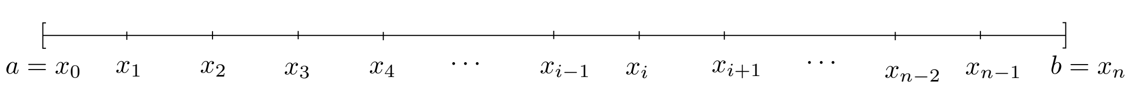




$$\sum_{i=1}^{6} \text{Área de } r_i \quad \leq \quad \text{Área de A} \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{6} \text{Área de } R_i$$

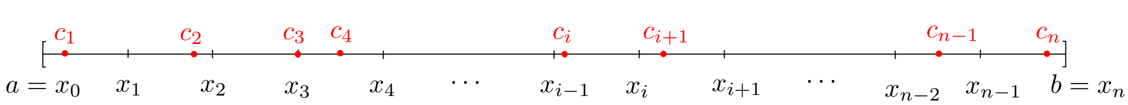
Observe que quanto menor for a largura dos retângulos melhor será a aproximação da área de A.

Partição e Soma de Riemann: Seja uma seguinte partição de $[a, b]$ em n intervalos da forma $[x_{i-1}, x_i]$ com $i = 1, \ldots, n$:

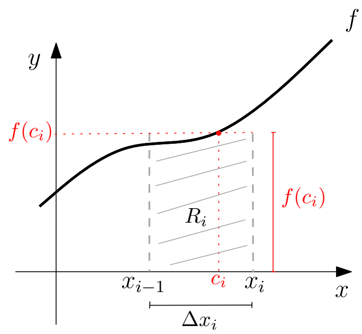


Denotamos o comprimento de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ por $\boxed{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}}$.

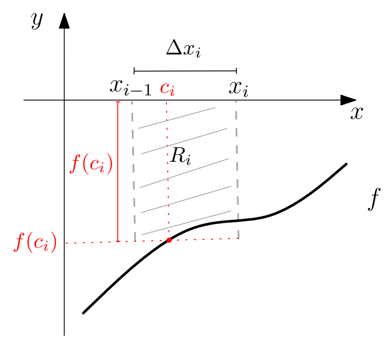
Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ vamos escolher um pontilhamento $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.



Vamos analisar como será a área em cada retângulo:



Área de $R_i = f(c_i) \cdot \Delta x_i$



Área de $R_i = |f(c_i)| \cdot \Delta x_i = -f(c_i) \cdot \Delta x_i$

Assim, geometricamente, se $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ é uma partição de um intervalo $[a, b]$ e $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, é um pontilhamento de $[a, b]$, temos que

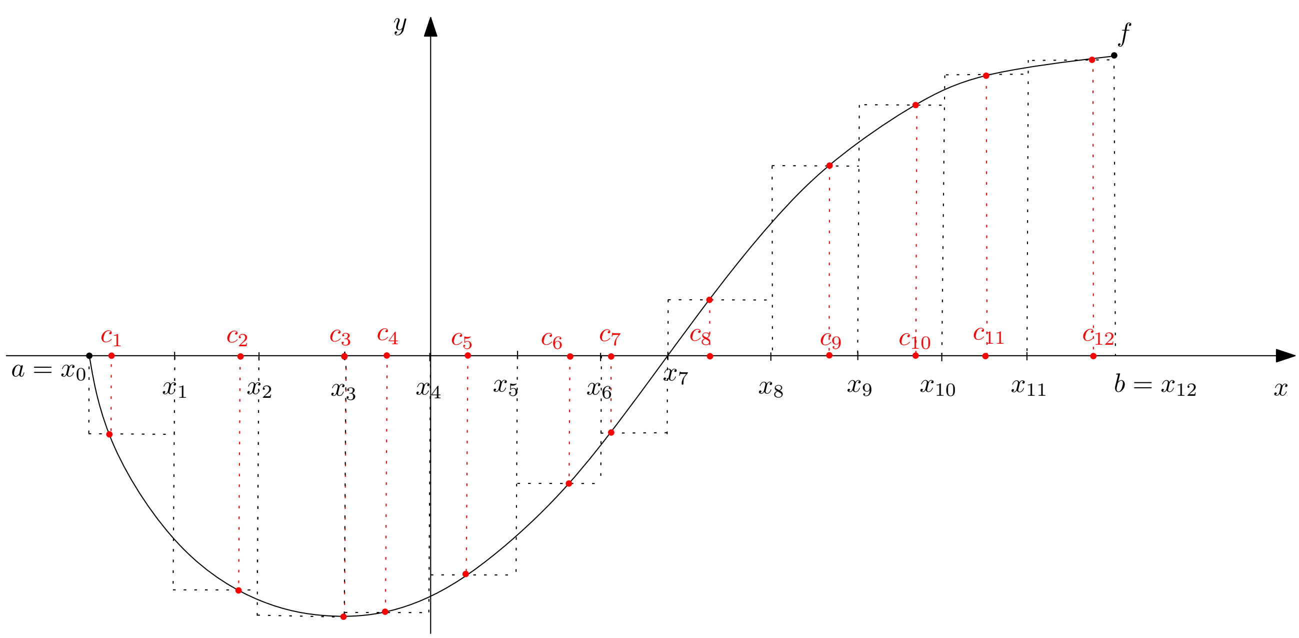
$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n$$

é igual

Soma da áreas dos retângulos acima do eixo x	-	Soma da áreas dos retângulos abaixo do eixo x

Definimos então a **Soma de Riemann** de uma função f limitada em um intervalo $[a, b]$ associada a uma partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ e a um pontilhamento $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, da seguinte maneira

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n}$$



A integral definida: Seja $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$ = o maior número entre os $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$. Definimos a **integral definida de f em** $[a, b]$ como sendo

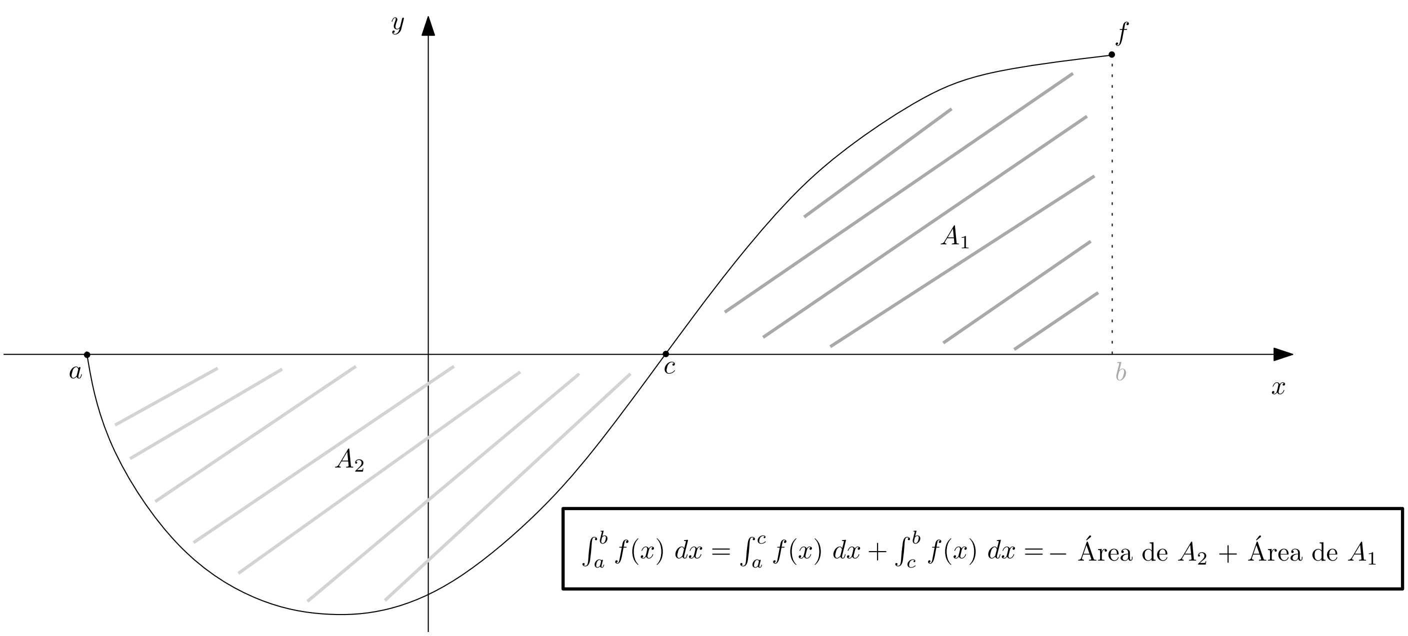
$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i}$$

se este limite existir e for igual para qualquer de $[a, b]$ e qualquer pontilhamento $c_i, i = 1, \ldots, n$, de $[a, b]$.

Observação 1. *Por definição,* $\int_a^a f(x)\ dx = 0$ *e* $\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$.

Assim, temos que geometricamente que a $\int_a^b f(x)\ dx$ é

Área entre o gráfico de f e o eixo x nos subintervalos de $[a, b]$ tais que $f(x) \geq 0$	**-**	Área entre o gráfico de f e o eixo x nos subintervalos de $[a, b]$ tais que $f(x) \leq 0$



Propriedades da integral definida: Sejam f e g duas funções integráveis em $[a, b]$ e $K \in \mathbb{R}$ uma constante. Então:

1. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$
2. $\int_a^b K \cdot f(x)\ dx = K \cdot \int_a^b f(x)\ dx$
3. $\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx; a < c < b$
4. Se $f(x) \geqslant 0, \forall x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$
5. Se $f(x) \leqslant g(x), \forall x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx$.

6. $\displaystyle\int_a^b K\ dx = K \cdot (b-a)$
7. Sejam m e M constantes tais que $m \leqslant f(x) \leqslant M, \forall x \in [a,b]$, então

$$m \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant M \cdot (b-a).$$

Teorema 1. *Se f é contínua em $[a,b]$ ou tiver apenas um número finito de descontinuidades removíveis, então f é integrável em $[a,b]$.*

O Teorema Fundamental do Cálculo: Veremos que dentro de um contexto podemos dizer que a $\boxed{\text{integral}}$ e a $\boxed{\text{derivada}}$ são processos inversos.

Teorema 2 (do Valor Médio para Integrais). *Se f é contínua em $[a,b]$, então existe um $c \in [a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = f(c) \cdot (b-a)$.*

demonstração:

Como f é contínua em $[a,b]$, pelo Teorema do Valor Extremo, existem $c, d \in [a,b]$ tais que f(c) é o valor mínimo global e $f(d)$ é o valor máximo global de f em $[a,b]$, isto é,

$$f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d), \forall x \in [a,b]$$

Pela propriedade 7, temos que

$$f(c) \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant f(d) \cdot (b-a) \Rightarrow f(c) \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\ dx}{(b-a)} \leqslant f(d)$$

Assim, como f é contínua em $[c,d] \subset [a,b]$ (se $c < d$) ou $[d,c] \subset [a,b]$ (se $c > d$) e $f(c) \leqslant \dfrac{\int_a^b f(x)\ dx}{(b-a)} \leqslant f(d)$, então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\ dx}{(b-a)} \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx = f(c) \cdot (b-a)$$

■

Uma função F é dita uma **primitiva** de f em um intervalo I se $\boxed{F'(x) = f(x), \forall x \in I}$.

Teorema 3 (Fundamental do Cálculo).

1. *Se f é contínua em $[a,b]$ e se F é uma primitiva de f em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

2. *Se f é contínua em um intervalo $[b,c]$ e a é um ponto qualquer em $[b,c]$, então $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ é uma primitiva de f em $[b,c]$, isto é, $F'(x) = f(x), \forall x \in [b,c]$. Em outras palavras,*

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\ dt\right] = f(x), \forall x \in [b,c]$$

demonstração:

1. Seja uma partição $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Vamos escolher um pontilhamento de tal partição da seguinte maneira: como F é contínua em $[x_{i-1}, x_i]$ e derivável em (x_{i-1}, x_i) (pois $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$), então pelo Teorema do Valor Médio, existe $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.
Logo,

$$\begin{array}{lclcl} F(x_1) - F(a) & = & F'(c_1) \cdot (x_1 - a) & = & f(c_1) \cdot \Delta x_1 \\ F(x_2) - F(x_1) & = & F'(c_2) \cdot (x_2 - x_1) & = & f(c_2) \cdot \Delta x_2 \\ F(x_3) - F(x_2) & = & F'(c_3) \cdot (x_3 - x_2) & = & f(c_3) \cdot \Delta x_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) & = & F'(c_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) & = & f(c_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1} \\ F(b) - F(x_{n-1}) & = & F'(c_n) \cdot (b - x_{n-1}) & = & f(c_n) \cdot \Delta x_n \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i &= f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n \\ &= F(x_1) - F(a) + F(x_2) - F(x_1) + \cdots + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(b) - F(x_{n-1}) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

E portanto,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} F(b) - F(a) = F(b) - F(a)$$

2. Queremos mostrar que $F'(x) = f(x), \forall x \in [b, c]$.
<u>Caso 1:</u> Seja $x_0 \in (b, c)$.

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(t)\ dt - \int_a^{x_0} f(t)\ dt \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x_0+h} f(t)\ dt + \int_{x_0}^{a} f(t)\ dt \right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ dt \right] \end{aligned}$$

Como f é contínua em $[x_0, x_0 + h] \subset [b, c]$, pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existe $c \in [x_0, x_0 + h]$ tal que $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\ dt = f(c) \cdot h$. Logo,

$$F'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot f(c) \cdot h = \lim_{h \to 0} f(c)$$

Por outro lado, como $x_0 \leqslant c \leqslant x_0 + h$, então $\lim\limits_{h \to 0} c = x_0$ e como f é continua $\lim\limits_{h \to 0} f(c) = f(x_0)$.
Portanto, $F'(x_0) = f(x_0)$.
<u>Caso 2:</u> Se $x_0 = b$ ou $x_0 = c$ é análogo ao caso 1 fazendo as alterações para os limites laterais correspondentes.

$\blacksquare$