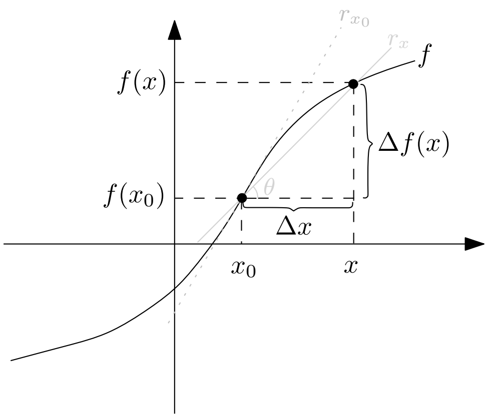
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I e Cálculo Diferencial I - Professora: Mariana G. Villapouca

Aula 3 - Derivada

Taxa de variação: Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$.



$\Delta x = x - x_0$

$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$tg(\theta) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ = coeficiente angular da reta r_x

- **Taxa de variação média:** $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$
- **Coeficiente angular da reta tangente:** Quando $x \to x_0 \Rightarrow (x, f(x)) \to (x_0, f(x_0)) \Rightarrow$ coeficiente angular de r_x tende ao coeficiente angular de r_{x_0}, isto é,

$$\text{o coeficiente angular de } r_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{\text{Equação da reta tangente} \quad r_{x_0} : y - f(x_0) = (\text{coef. ang. de } r_{x_0}) \cdot (x - x_0)}$$

- **Velocidade média e instantânea:** Seja $s(t)$ a função posição de uma partícula no instante t.

$$\boxed{\text{velocidade média} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}}$$

Observe que se Δt for bem pequeno a velocidade média se aproxima da velocidade no instante t_0, isto é,

$$\boxed{\text{velocidade em } t_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}}$$

Derivada de uma função

Definição 1. *Sejam f uma função e $x_0 \in Dom(f)$. Definimos a derivada de f em x_0 como sendo*

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

quando o limite acima existe e é finito.

Se f admite derivada em x_0, então dizemos que f é derivável ou diferenciável em x_0. Dizemos apenas que f é derivável ou diferenciável quando admite derivada em todos os pontos do seu domínio.

Observação 1. *Como $f'(x_0)$ (quando existe) é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, então a equação de tal reta será*

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Definição 2 (Derivada nos extremos do intervalo)**.** *Seja uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável, então*

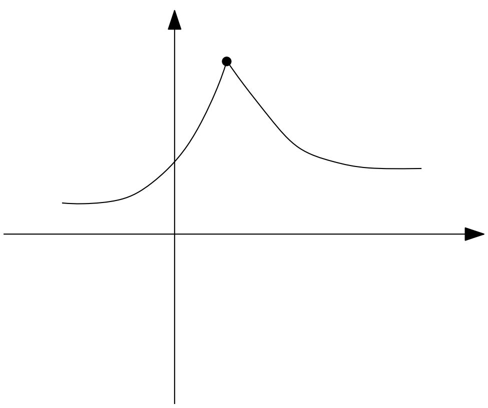
- $f'(a) = f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- $f'(b) = f'_-(b) = \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(b+h) - f(b)}{h}$

Observação 2 (Outras notações)**.**

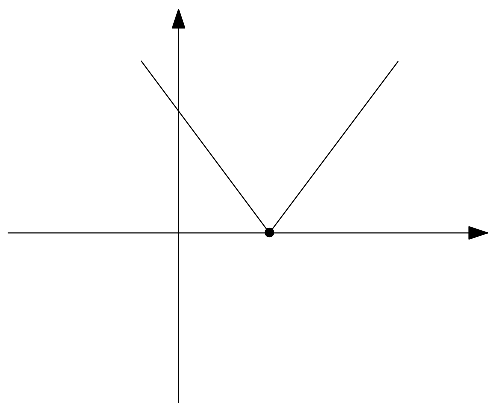
- $f'(x) = \dfrac{df}{dx}(x) = D_x(f(x))$
- *Se* $y = f(x)$, $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Observação 3. *Geometricamente, os pontos de diferenciabilidade de uma função f são aqueles onde a curva $y = f(x)$ tem uma reta tangente, e os pontos de não-diferenciabilidade são aqueles onde a curva não tem reta tangente. Intuitivamente, os pontos de não-diferenciabilidade mais comuns são:*

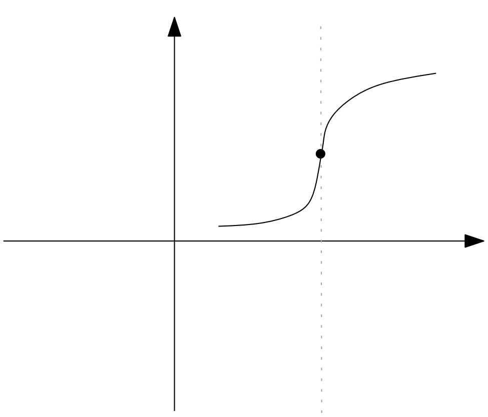
Pico



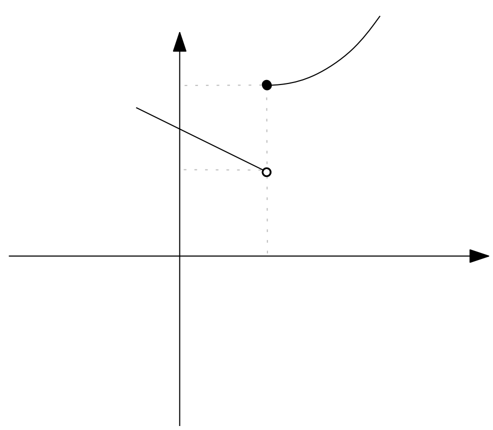
Pico



Pontos de tangência vertical



Pontos de descontinuidade



Teorema 1 (Relação entre diferenciabilidade e continuidade)**.** *Se f é diferenciável em x_0, então f é contínua em x_0.*

demonstração: Se f é diferenciável em x_0, então existe

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Assim,

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \cdot \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} \cdot h = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Logo,

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

isto é, f é contínua em x_0.

■

Observação 4. $\boxed{\textit{Nem toda função contínua é diferenciável!!!}}$

Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$, mas não é diferenciável em $x = 0$. (Verifique!)

Derivada das funções logaritmo e exponencial

1. $D_x(e^x) = e^x$
2. $D_x(ln(x)) = \dfrac{1}{x}$

Propriedades da Derivada: Sejam f e g duas funções diferenciáveis em x_0 e $K \in \mathbb{R}$ uma constante.

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(K \cdot f)'(x_0) = K \cdot f'(x_0)$
3. $\boxed{\textbf{Regra do Produto: } (f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)}$
4. $\boxed{\textbf{Regra do quociente: } \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{(g(x_0))^2} \text{ se } g(x_0) \neq 0}$

demonstração:

1. $$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

2. $(K \cdot f)'(x_0) = \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{(Kf)(x) - (Kf)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{Kf(x) - Kf(x_0)}{x - x_0} = K \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = K \cdot f'(x_0)$

3. $$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - g(x)f(x_0) + g(x)f(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

4. Primeiramente, usando a regra do produto, temos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) + f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)}$$

Agora, vamos calcular $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Portanto,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) + f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} = -f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} + \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

■

Derivada das funções trigonométricas

1. $D_x(sen(x)) = cos(x)$
2. $D_x(cos(x)) = -sen(x)$
3. $D_x(tg(x)) = sec^2(x)$
4. $D_x(sec(x)) = sec(x) \cdot tg(x)$
5. $D_x(cossec(x)) = -cossec(x) \cdot cotg(x)$
6. $D_x(cotg(x)) = -cossec^2(x)$

Derivadas laterais Para que uma função f seja diferenciável em x_0 devemos ter que as derivadas laterais abaixo existem e assumem o mesmo valor que será o valor de $f'(x_0)$

$$\boxed{f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \qquad \boxed{f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Observação 5.

- *Note que se uma das derivadas laterais não existir ou se as derivadas laterais assumem valores distintos, temos que a função não será diferenciável no ponto onde isso acontece.*
- *Para calcular a derivada das funções que são definidas por partes devemos usar as derivadas laterais.*

Regra da Cadeia (derivada de uma composição de funções):

Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções diferenciáveis, com $Im(g) \subset Dom(f)$. Então $h(t) = f \circ g(t) = f(g(t))$ é diferenciável e sua derivada é

$$\boxed{h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)}$$

Observação 6 (Regra da Cadeia com a notação de Leibniz)**.** *Seja* $y = f(x)$ *e* $x = g(t)$, *então*

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}}$$

Função derivada e derivadas de ordem superior: Seja f uma função e $A = \{x \in Dom(f) \mid \exists f'(x)\}$.

Função derivada de f

(derivada de primeira ordem de f)

$$\boxed{\begin{array}{cccc} f': & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}}$$

A derivada da função f', f'', é a **derivada de segunda ordem de** f. E assim, $f^{(n)}$ é a **derivada de ordem** n **ou n-ésima derivada de** f**.**