Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I e Cálculo Diferencial e Integral I - Professora: Mariana G. Villapouca

Limite e continuidade

Aula 12 - Propriedades do limite

4. Propriedades do limite

Sejam f, g duas funções tais que existem os limite $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ e $K \in \mathbb{R}$ uma constante, então:

1. $\lim_{x\to a} K \cdot f(x) = K \lim_{x\to a} f(x) = K \cdot L_1$
2. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$
3. $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 L_2$
4. $\lim_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$
5. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = (L_1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
6. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e se $L_1 \in Dom(\sqrt[n]{x})$.
7. $\lim_{x\to a} ln(f(x)) = ln(\lim_{x\to a} f(x)) = ln(L_1)$ se $L_1 \in Dom(ln(x))$.
8. $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L_1|$

demonstração:

1. Dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$ então
$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{|K|}$$
Assim, se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$ então
$$|K \cdot f(x) - K \cdot L_1| = |K| \cdot |f(x) - L_1| < |K| \cdot \frac{\varepsilon}{|K|} = \varepsilon.$$
2. Dado $\varepsilon > 0$,
   - existe $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
   - existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_2) \Rightarrow |f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, tem-se que se $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ então

$$|(f(x)+g(x)) - (L_1 + L_2)| \leqslant |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Dado $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$ $(n \in \mathbb{N})$

   - existe $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \dfrac{1}{n}$
   - existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2) \Rightarrow |f(x) - L_2| < \dfrac{1}{n}$

   Tome $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, se $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ então

$$\begin{aligned}
|f(x)\cdot g(x) - L_1 \cdot L_2| &= |f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot L_2 + f(x)\cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| \\
&= |f(x)[g(x) - L_2] + L_2[f(x) - L_1]| \\
&\leqslant |f(x)| \cdot |g(x) - L_2| + |L_2| \cdot |f(x) - L_1| \\
&\leqslant |f(x)| \cdot \frac{1}{n} + |L_2| \cdot \frac{1}{n} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{n} + |L_1|\right) \cdot \frac{1}{n} + |L_2| \cdot \frac{1}{n} \\
&\leqslant \frac{1}{n^2} + |L_1| \cdot \frac{1}{n} + |L_2| \cdot \frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 0
\end{aligned}$$

   pois $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \dfrac{1}{n} \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{1}{n} + |L_1|$.

   Portanto, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x) - L_1 \cdot L_2) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$.

4. Dado $\varepsilon > 0$

   - existe $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$
   - existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2) \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$
   - existe $\delta_3 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_3, a) \cup (a, a+\delta_3) \Rightarrow |L_2^2| - |g(x)\cdot L_2| \leqslant |g(x)L_2 - L_2^2| < \dfrac{L_2^2}{2}$.

     Daí, tem-se que $\dfrac{1}{|g(x)L_2|} < \dfrac{L_2^2}{2}$ para todo $x \in (a-\delta_3, a) \cup (a, a+\delta_3)$.

   Tome $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$. Assim, se $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ então

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_1}{L_2}\right| = \left|\frac{L_2 f(x) - L_1 g(x)}{g(x)L_2}\right| = |L_2 f(x) - L_1 g(x)| \cdot \frac{1}{|g(x)L_2|} \leqslant |L_2 f(x) - L_1 g(x)| \cdot \frac{L_2^2}{2} \overset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

   Portanto, $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{L_1}{L_2}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

Os itens (e), (f), (g) e (h) são consequências da continuidade das funções x^n, $\sqrt[n]{x}, ln(x)$ e $|x|$ junto com a propriedade da composta que veremos posteriormente. ■

Observação 1. *Todas as propriedades listadas acima também são válidas para* $\lim\limits_{x\to a^+}$ *e* $\lim\limits_{x\to a^-}$ *fazendo as alterações necessárias.*

Exemplo 1. *Calcule, caso exista, o limite* $\lim_{x \to -1} \dfrac{(x^3-4)(x^5-6)}{ln(x^2+1)}$

Exemplo 2. *Calcule, caso exista, o limite* $\lim_{x \to -2} \sqrt[3]{|x^3+1|}$

Exercício 1. *Prove, usando as propriedades acima, que para todo* $a \in \mathbb{R}$*, temos que* $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$*, onde* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *é um polinômio de grau* n *qualquer.*

Observação 2. *Se* $y = g(x)$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = b$*, então*

$$\lim_{x \to a}(f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = \lim_{y \to b} f(y).$$

Teorema 1 (do Confronto)**.** *Sejam* f, g *e* h *três funções tais*

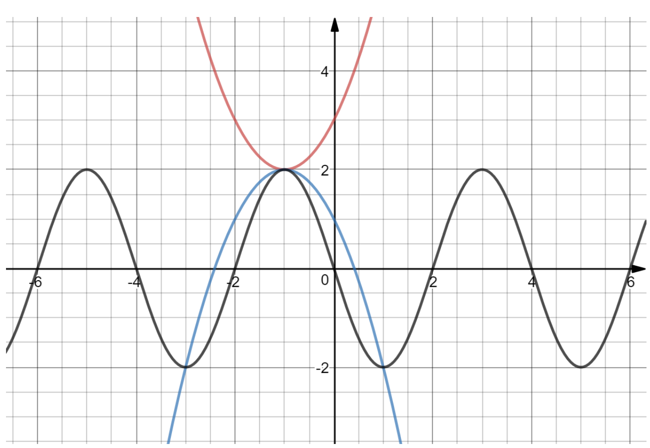
$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

para todo $x \in (a-\delta, a) \cup (a+\delta) \subset (Dom(f) \cap Dom(g) \cap Dom(h))$*. Se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$



demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ temos que

- $\exists \delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$
- $\exists \delta_2 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1) \Rightarrow h(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

Assim, tomando $\delta_0 = min\{\delta_1, \delta_2, \delta\}$ obtemos que

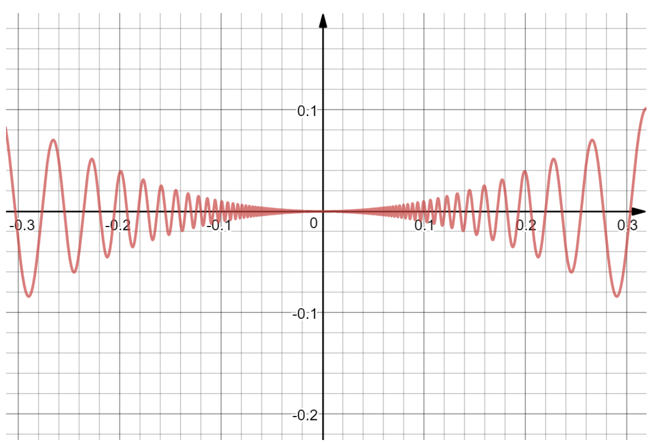
- se $x \in (a - \delta_0, a) \cup (a, a + \delta_0) \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \varepsilon$

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. ■

Corolário 1 (Teorema do anulamento)**.** *Sejam f e g funções. Se*

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$
2. $-M \leqslant g(x) \leqslant M$ *para todo* $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \subset Dom(f)$

então, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.



demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$ então $|f(x)| = |f(x) - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Tome $\delta_2 = min\{\delta_1, \delta\}$. Daí, se $x \in (a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_2)$ então

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$. ■

Exemplo 3. *Calule, caso exista,* $\lim_{x \to 0} x^2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pergunta: Existe $\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$?

Exercício 2. *Use um recurso computacional para desenhar o gráfico de* $x^2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ *para verificar o resultado encontrado no exemplo anterior.*

Exercício 3. *Se* $|f(x)| \leqslant x^2$ *para todo* $x \in Dom(f)$, *verifique que* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Exercício 4. *Calcule, caso exista, o limite* $\lim_{x \to 0} x^2 \cdot g(x)$ *onde* $g(x) = \begin{cases} 1, & se \ \ x \in \mathbb{Q} \\ -1, & se \ \ \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Pergunta: Existe $\lim_{x \to 0} g(x)$?