Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I e Cálculo Diferencial e Integral I - Professora: Mariana G. Villapouca

Limite e continuidade

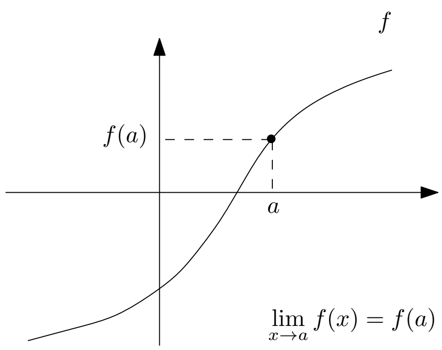
Aula 14 - Continuidade

5. <u>Continuidade</u>

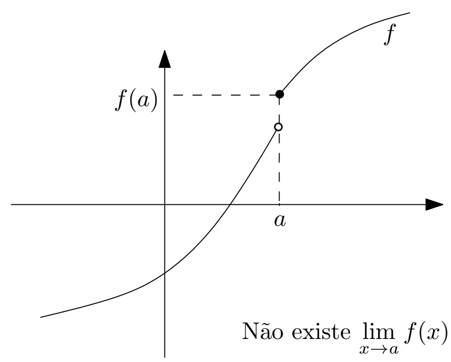
Definição 1. Sejam f uma função e a um ponto no domínio de f. Dizemos que

$$\boxed{f \text{ é contínua em um ponto } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

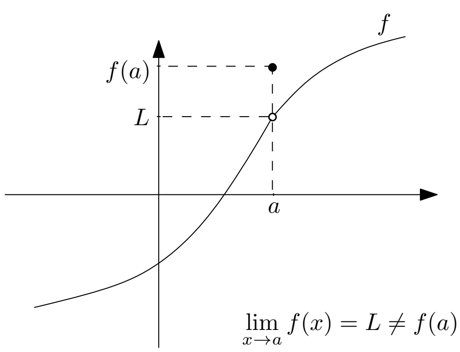
Se f não é contínua em um ponto a, dizemos que <u>f é descontínua em a</u>. Um ponto de <u>descontinuidade</u> a é <u>removível</u> se $\exists \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. Dizemos que uma função f é contínua se ela é contínua em todos os pontos do seu domínio e é contínua em um intervalo I se ela é contínua em cada ponto deste intervalo I.



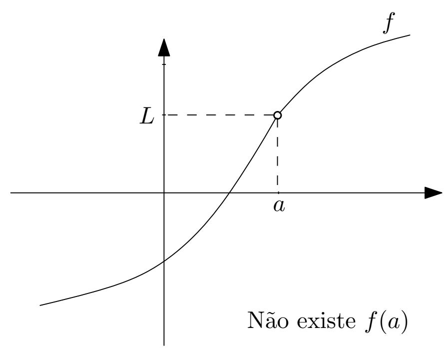
f é contínua em a



f é descontínua em a



f é descontínua em a



f é descontínua em a

<u>**Propriedades:**</u> Sejam f e g duas funções contínuas em um ponto $a \in Dom(f) \cap Dom(g)$ e K uma constante, então:

1. $K \cdot f$ é contínua em a,
2. $f + g$ é contínua em a,
3. $f \cdot g$ é contínua em a,
4. $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a se $g(a) \neq 0$.

demonstração: Exercício!

Na seção 3 da aula 11 vimos que:

- A função constante é contínua em $\mathbb{R}$.
- A função linear é contínua em $\mathbb{R}$.
- A função raiz quadrada é contínua em $[0, +\infty)$.
- A função raiz n-ésima é contínua em seu domínio.
- A função modular é contínua em $\mathbb{R}$.
- A função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.

Observação 1. *As funções exponencial, logarítmica e as trigonométricas são contínuas em seus domínios.*

Exemplos:

1. Se $|f(x)| \leqslant x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então f é contínua em $x = 0$?.

2. A função $f(x) = x^2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ é contínua em $x = 0$? E a função $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se} x \neq 0 \end{cases}$?

3. A função $x^2 \cdot g(x)$ onde $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ é contínua em $x = 0$?

4. Quais são os pontos onde $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ é contínua em x=0?

5. A descontinuidade $x = 2$ da função $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ é removível?

6. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } |x| < 1 \\ 1 - x^2, & \text{se } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

Quais são os pontos que f é contínua? Existem pontos de descontinuidade? Caso existam, esses pontos são removíveis?

7. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1}, & \text{se } x \leqslant -1 \\ ax+b, & \text{se } -1 < x < 0 \\ |x^2-1|, & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Qual é o domínio? Existem valores reais a e b tais que a função f seja contínua em seu domínio? Em caso afirmativo, determine esses valores usando os limites laterais.

Teorema 1 (limite da composta)**.** Sejam f e g duas funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e g é contínua no ponto b. Então:

$$\lim_{x\to a} (g\circ f)(x) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

Em particular, se no teorema acima tivermos $b = f(a)$, isto é, se f é contínua em a teremos o seguinte:

Teorema 2 (Continuidade da composta)**.** Sejam f e g duas funções. Se g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então $f\circ g$ é contínua em a. Isto é, se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(g(a))$, então

$$\lim_{x\to a} (f\circ g)(x) = (f\circ g)(a).$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend right, mapsto, "f\circ g"'] & g(x) \arrow[r, mapsto, "f"] & f(g(x)) \end{tikzcd}$$

Exemplo 1. *Determine o conjuntos dos pontos onde* $f(x) = \dfrac{sen^2(x^2) + ln(x^2+1)}{x^2 \cdot arctg(x)}$.

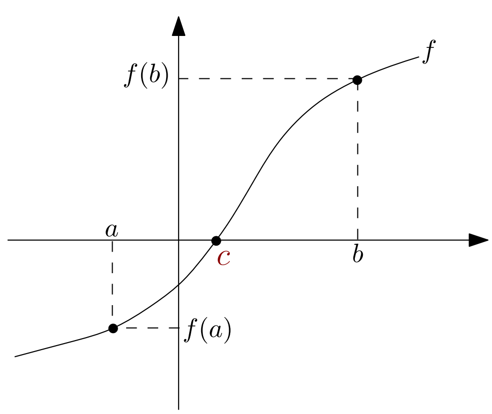
Exercício 1. *Analise a continuidade das funções trigonométricas sabendo que as funções seno e cosseno são contínuas em seus domínios.*

Exercício 2. *Verifique a continuidade das funções $ln(x)$, $arcsen(x)$, $arccos(x)$ e $arctg(x)$ usando o fato das funções e^x, $sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$ serem contínuas em seus domínios.*

Definição 2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, diremos que f é contínua em $[a, b]$ se:*

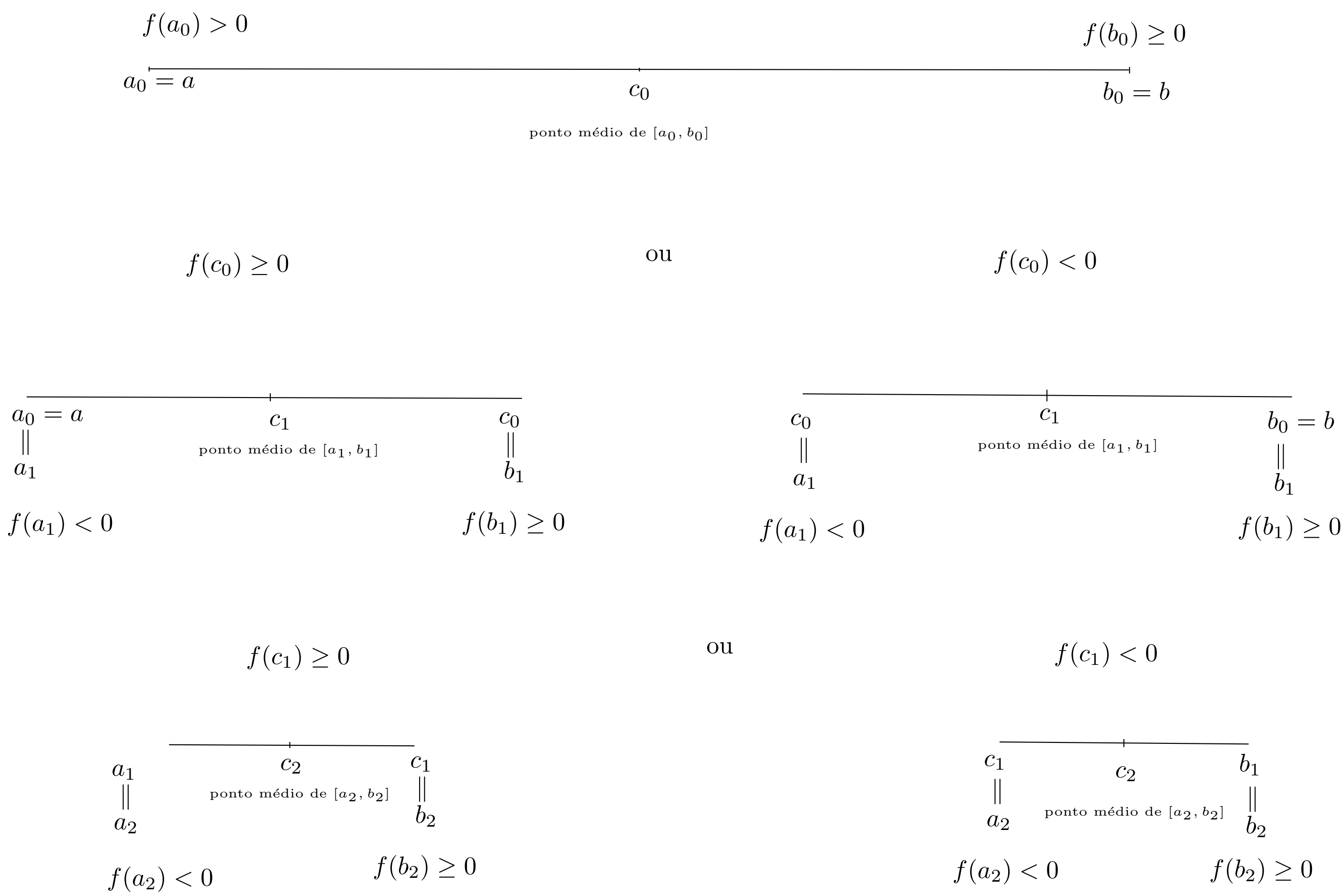
1. *f é contínua em (a, b)*
2. *$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$*
3. *$\exists \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$*

Teorema 3 (de Bolzano)**.** *Se f é contínua em $[a, b]$, $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais contrários, então existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*



demonstração:

Caso1: $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$



$$\vdots$$

Assim, temos que $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots [a_n, b_n] \supset \cdots$ onde $f(a_i) < 0$ e $f(b_i) \geqslant 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Logo, pelo Teorema do intervalos encaixantes, existe $c \in \bigcap_{i=0}^{+\infty} [a_i, b_i]$, isto é, existe um c tal que $a_n \leqslant c \leqslant b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por um lado, temos, pela construção dos intervalos, que

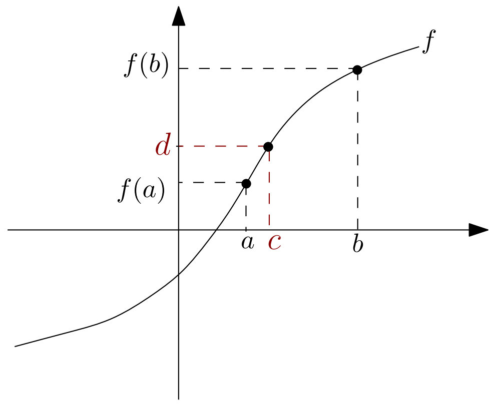
$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}| = \frac{1}{2}\frac{1}{2}|b_{n-2} - a_{n-2}| = \cdots = \frac{1}{2^n}|b_0 - a_0| = \frac{1}{2^n}|b - a| \to 0$$

quando $n \to +\infty$. Portanto, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ e, pelo Teorema do confronto, temos também que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = c$.

Por outro, pela continuidade de f tem-se que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(b_n) = f(c)$, logo devemos ter que $f(c) < 0$ e $f(c) \geqslant 0$, portanto $f(c) = 0$.

O caso 2 onde $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ é análogo. $\blacksquare$

Teorema 4 (do Valor Intermediário)**.** *Se uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e se d é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.*



demonstração: <u>Caso 1:</u> $f(a) < d < f(b)$.

Como $g(x) = f(x) - d$ é contínua em $[a, b]$, $g(a) = f(a) - d < 0$ e $g(b) = f(b) - d > 0$, temos, pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, isto é, $g(c) = f(c) - d = 0 \Rightarrow f(c) = d$.

<u>Caso 2:</u> $f(a) > d > f(b)$ é análogo ao caso 1. ■

Observação 2. *Uma aplicação é a garantia da existência de raízes de algumas equações.*

Exemplo 2. *Prove, usando o T.V.I ou o Teorema de Bolzano, que existe pelo menos 1 raiz de $x^3 - 3x + 1$ em $(0, 1)$.*

Exercício 3. *Prove que $x^3 - 4x + 2$ possui 3 raízes reais distintas.*

Exercício 4. *Mostre que a função* $f(x) = 1 - 2x^2 - arctg(x)$ *atinge o valor* $\frac{1}{2}$ *no intervalo* $[0, 1]$.

Exercício 5. *Diga se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. A função* $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & se \ |x| < 2 \\ -|x|, & se \ |x| \geqslant 2 \end{cases}$ *contradiz o Teorema de Bolzano, pois* $f(1) = 2 > 0$ *e* $f(3) = -3 < 0$*, mas pelo gráfico vemos que* $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema 5 (de Weierstrass ou Teorema do Valor extremo)**.** *Se* f *é contínua em* $[a, b]$*, então existem* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *tais que*

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \forall x \in [a, b].$$

demonstração:

Como f é contínua em $[a, b]$ (intervalo fechado e limitado), então f é limitada em $[a, b]$. Sejam

- $M = sup\,\{f(x) \ | \ x \in [a, b]\}$
- $m = inf\,\{f(x) \ | \ x \in [a, b]\}$

Logo, $m \leqslant f(x) \leqslant M, \forall x \in [a, b]$

Afirmação: Existe $x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_2) = M$.

Suponha, por absurdo, que $f(x) < M, \forall x \in [a,b]$, então a função $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ é contínua em $[a,b]$. Daí, temos que g é limitada em $[a,b]$, logo existe um $\beta > 0$ tal que

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < \beta, \forall x \in [a,b]$$

daí $f(x) < M - \dfrac{1}{\beta} < M = sup\left\{f(x) \mid x \in [a,b]\right\}, \forall x \in [a,b]$, contrariando o fato de M ser supremo de $f(x)$ em $[a,b]$.

Portanto existe $x_2 \in [a,b]$ tal que $f(x_2) = M$.

Afirmação: Existe $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) = m$ é análoga.

$\blacksquare$