Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I e Cálculo Diferencial e Integral I - Professora: Mariana G. Villapouca

Limite e continuidade

Aula 15 - Limite infinito e no infinito

6.<u>Limite infinito</u>

Definição 1 (Limite infinito)**.** *Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a $+\infty$, isto é,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

se para todo número positivo M, existe um intervalo da forma $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)\subset Dom(f)$ tal que

$$x \in (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > M.$$

E dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a $-\infty$, isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

se para todo número negativo M, existe um intervalo da forma $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)\subset Dom(f)$ tal que

$$x \in (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < M.$$

Observação. *De maneira semelhante definimos*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty, \quad e \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty,$$

mudando o intervalo para $(a, a+\delta)$ e $(a-\delta, a)$, respectivamente, na definição anterior.

Observação (Atenção!!!)**.** *O limite de $f(x)$ quando $x \to a$ ou a^- ou a^+ ser igual à $+\infty$ ou $-\infty$ significa que o limite não existe!*

<u>Propriedades:</u>

1. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}-\{0\}$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então:

   - $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se existe um $\delta > 0$ tal que $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0, \forall x \in (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)\subset Dom(f)\cap Dom(g)$,

- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ se existe um $\delta > 0$ tal que $\frac{f(x)}{g(x)} < 0, \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f) \cap Dom(g)$.

2. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$ e $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$ ou $-\infty$, então:
   - $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L \pm \infty = \pm\infty$
   - Se $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, então
     $$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot(+\infty) = \begin{cases} \infty, & L > 0 \\ -\infty, & L < 0 \\ \text{indeterminado}, & L = 0 \end{cases}$$
   - Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, então
     $$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot(+\infty) = \begin{cases} -\infty, & L > 0 \\ +\infty, & L < 0 \\ \text{indeterminado}, & L = 0 \end{cases}$$
   - Se $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$
     - $\lim_{x\to a}[g(x) + h(x)] = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$
     - $\lim_{x\to a}[g(x)\cdot h(x)] = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$
   - Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$
     - $\lim_{x\to a}[g(x) + h(x)] = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$
     - $\lim_{x\to a}[g(x)\cdot h(x)] = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$
   - Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$
     - $-\infty + (+\infty) = \infty - \infty$ é indeterminado!!!!!
     - $\lim_{x\to a}[g(x)\cdot h(x)] = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$

Observação. ***Atenção!!!!*** *Cuidado com as indeterminações:* $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, \infty\cdot 0, 0^0, 1^\infty$ *e* ∞^0 *essas expressões nada dizem sobre o limite!!!!*

Vamos analisar alguns exemplos de tais indeterminações:

- $\boxed{\textit{Caso } \frac{\infty}{\infty}}$: *Sejam* $f(x) = g(x) = \frac{1}{x}$ *e* $h(x) = \frac{1}{x^2}$. *Note que*

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) =$$

  - $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} =$

  - $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{h(x)} =$

- $\boxed{Caso\ \frac{0}{0}}$: *Sejam* $f(x) = h(x) = \sqrt[3]{x-1} - 1$ *e* $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2}$. *Note que*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) =$$

  - $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} =$

  - $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{h(x)} =$

- $\boxed{Caso\ \infty - \infty}$: *Sejam* $f(x) = h(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$ *e* $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. *Note que*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) =$$

  - $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) =$

  - $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) - h(x) =$

- $\boxed{Caso\ 0 \cdot \infty}$: *Sejam* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x \cdot sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *e* $h(x) = ln(x)$. *Note que*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \ e \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \ e \lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$$

  - $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) \cdot g(x) =$

  - $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) \cdot h(x) =$

Os demais casos serão avaliados quando tivermos feito a Regra de L'Hôspital.

7. Limite no infinito

Definição 2. *Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ é igual a L, isto é,*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L,$$

se para todo intervalo da forma $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, *existe um número positivo* N *tal que*

$$x > N, x \in Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

E dizemos que o limite de $f(x)$ *quando* x *tende a* $-\infty$ *é igual a* L, *isto é,*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L,$$

se para todo intervalo da forma $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, *existe um número negativo* N *tal que*

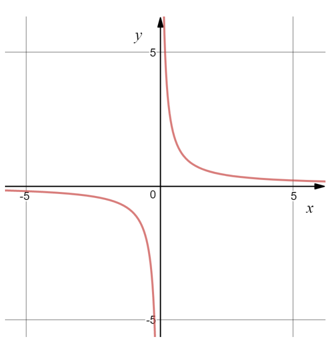
$$x < N, x \in Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Propriedades:

1. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{K}{x^n} = 0, n \in \mathbb{N}$ e $K \in \mathbb{R} - \{0\}$
2. Se $K \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, então $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{K}{f(x)} = 0$
3. Se existem $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$ e $K \in \mathbb{R}$, então
   - $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (Kf(x) + g(x)) = K \lim_{x\to\pm\infty} f(x) + \lim_{x\to\pm\infty} g(x)$
   - $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to\pm\infty} g(x)\right)$
   - $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)}$ se $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} g(x) \neq 0.$

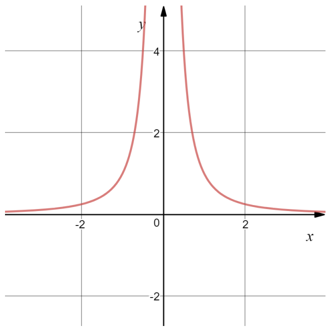
Exemplos de limite infinito e no infinito: Em cada item determine o domínio da função e, se possível, calcule o limite indicado:

1. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Temos que $Dom(f) =$



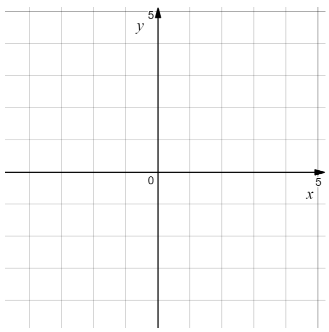
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} =$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} =$

2. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Temos que $Dom(f) =$



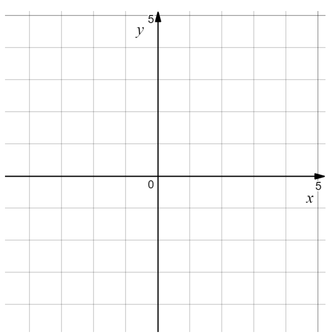
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} =$

3. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Temos que $Dom(f) =$



- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} =$
- $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} =$

4. Seja $f(x) = \dfrac{3-x}{2-x} = \dfrac{1}{2-x} + 1$. Temos que $Dom(f) =$

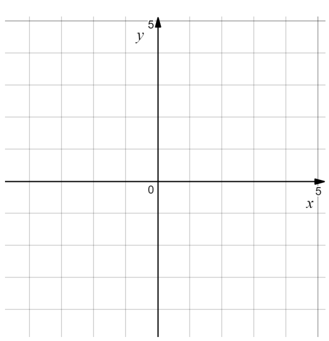


- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2-x} + 1 =$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2-x} + 1 =$
- $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{2-x} + 1 =$
- $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{2-x} + 1 =$

5. **Exercício:** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x+8} + \frac{1}{x^2}$

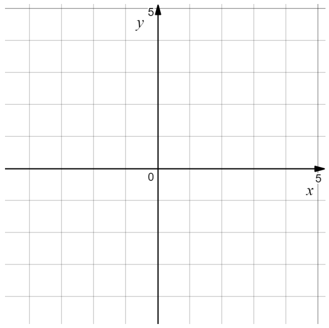
6. **Exercício:** $\displaystyle\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2}$

7. Seja $f(x) = tg(x)$. Temos que $Dom(f) =$



- $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} tg(x)$
- $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tg(x)$

8. Seja $f(x) = x$. Temos que $Dom(f) =$



- $\lim\limits_{x \to +\infty} x =$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x =$

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - x) =$

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} =$

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3 + 4x - 3) =$

12. $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 4x - 3) =$

13. Seja a_n diferente de 0.
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$

14. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 4}{x^5 - 2x + 1}$

15. **Exercício:** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 4}{x^5 - 2x + 1}$

16. **Exercício:** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^5 - 2x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x + 4}$

17. **Exercício:** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 2x + 1}{x^3 + 4}$

18. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 - 2}{1 - 2x}$

19. **Exercício:** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 - 2}{1 - 2x}$

20. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4 + x - 3x^2}{5 + 5x^2}$

21. Sejam a_n e b_m diferentes de 0.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

22. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{|x^3-2|}{3-x^3}$

23. **Exercício:** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2}{3-x^3}$

24. **Exercício:** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{|4+x-3x^2|}{5+5x^2}$

25. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

26. **Exercício:** $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

27. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2-3x} - \sqrt{4x^2+8}\right)$

8. Assíntotas verticais e horizontais

Definição 3 (Assíntota vertical)**.** *Uma reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função f se*

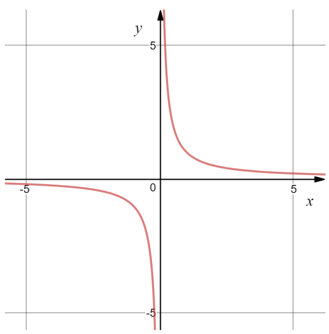
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty, \quad e/\ ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Definição 4 (Assíntota horizontal)**.** *Uma reta* $y = L$ *é uma* ***assíntota horizontal*** *do gráfico de uma função* f *se*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L.$$

Exemplos de assíntotas verticais e horizontais: Em cada item determine, caso existam, as assíntotas e/ou horizontais:

1. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Temos que $Dom(f) =$



- Assíntotas verticais:
- Assíntotas horizontais:

2. Seja $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$. Temos que $Dom(f) =$
   - Assíntotas verticais:
   - Assíntotas horizontais:

3. **Exercício:** Seja $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.
4. **Exercício:** Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 - 3}}{\sqrt{x^3 - 2x}}$.
5. **Exercício:** Seja $f(x) = tg(x)$.
6. **Exercício:** Seja $f(x) = arctg(x)$.