Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I e Cálculo Diferencial e Integral I - Professora: Mariana G. Villapouca

Limite e continuidade

Aula 16 - Limites fundamentais

9.<u>Limites Fundamentais</u>

<u>Primeiro limite fundamental:</u> $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1}$

Para uma demonstração acesse: `https://youtu.be/Ve99biD1KtA`.

Exemplos usando o primeiro limite fundamental: Calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x} =$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} =$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} =$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{sen(3x)}{x} =$

5. $\lim_{x \to 1} \frac{sen(x^2 - 1)}{x - 1} =$

6. **Exercício:** $\lim_{x \to 1^+} \frac{sen(x^2 - 1)}{1 - cos(\sqrt{x^2 - 1})} =$

7. $\lim_{x \to 0} \frac{sen(3x) \cdot (1 - cos(7x)) \cdot tg^2(x)}{x^5} =$

<u>Segundo limite fundamental:</u> $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$

A demonstração pode ser vista no livro GUIDORIZZI, H., Um Curso de Cálculo, Vol. I, Livros Técnicos e Científicos Editora! E é uma da maneiras de se definir o número neperiano e.

Exemplos usando o segundo limite fundamental: Calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} =$

2. Seja $b \in \mathbb{R}$ constante. $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x} =$

3. $\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+b} =$

4. **Exercício:** Se $2^a + 2^{a-1} = 192$ e $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{ax} = L$. Determine $ln(L)$.

<u>**Terceiro limite fundamental:**</u> Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln(a)}$

Vejamos que o terceiro limite fundamental é uma consequência do segundo limite fundamental. Se fizermos a mudança de variável $t = a^x - 1$, teremos que $x = \dfrac{ln(t+1)}{ln(a)}$ e

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\left(\dfrac{ln(t+1)}{ln(a)}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{ln(a) \cdot t}{ln(t+1)} = ln(a) \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \cdot ln(t+1)} = ln(a) \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} =$$

$$= ln(a) \cdot \frac{1}{ln\left(\lim\limits_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)} = ln(a) \cdot \frac{1}{ln(e)} = ln(a)$$

Exemplos usando o terceiro limite fundamental: Calcule os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

3. **Exercício:** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 5^x}{sen(2x) - sen(x)}$

4. **Exercício:** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{x+2} - 9}{e^x - 1}$