

Derivada

Aula 19 - Derivadas laterais, regra da cadeia e derivadas de ordem superior

Derivadas laterais Para que uma função f seja diferenciável em x_0 devemos ter que as derivadas laterais abaixo existem e assumem o mesmo valor que será o valor de $f'(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Observação 1.

- *Note que se uma das derivadas laterais não existir ou se as derivadas laterais assumem valores distintos, temos que a função não será diferenciável no ponto onde isso acontece.*
- *Para calcular a derivada das funções que são definidas por partes devemos usar as derivadas laterais.*

Exemplos de derivada de funções definidas por partes:

1. Seja $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x), & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 2x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$. A função f é contínua em $x = 0$? A função f é diferenciável em $x = 0$?

2. Seja $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{se } x < 1 \\ 1 + ax + bx^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. Existem valores a e b de maneira que f seja diferenciável em $x = 1$?

Regra da Cadeia (derivada de uma composição de funções):

Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções diferenciáveis, com $Im(g) \subset Dom(f)$. Então $h(t) = f \circ g(t) = f(g(t))$ é diferenciável e sua derivada é

$$h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

Observação 2 (Regra da Cadeia com a notação de Leibniz). *Seja $y = f(x)$ e $x = g(t)$, então*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Exemplos de derivada de funções compostas (Regra da Cadeia): Calcule a derivada das seguintes funções.

1. $h(t) = (t^2 - t + 1)^{1000}$

2. $f(x) = \text{sen}(\cos(\sqrt{3x+1}))$

3. $g(x) = \text{sen}(\text{arctg}(x^2 + 1))$, sabendo que $D_x(\text{arctg}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$

4. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável onde $g(0) = \frac{1}{2}$ e $g'(0) = 1$. Calcule $f'(0)$, onde $f(x) = (\cos(x)) \cdot g^2\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{x^2 + 2}\right)\right)$.

5. Sejam $y = u \cdot \cos^2(u^3)$ e $u = u(t)$. Calcule $\frac{dy}{dx}$.

6. **Exercício:** Calcule a deriva acima quando $u = \ln(x)$.

Função derivada e derivadas de ordem superior: Seja f uma função e $A = \{x \in \operatorname{Dom}(f) \mid \exists f'(x)\}$.

Função derivada de f

(derivada de primeira ordem de f)

$\begin{array}{lll} f' : & A & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto f'(x) \end{array}$

A derivada da função f' , f'' , é a **derivada de segunda ordem de f** . E assim, $f^{(n)}$ é a **derivada de ordem n ou n -ésima derivada de f** .

Exemplos de derivadas de ordem superior:

1. Seja $f(x) = x^5 + 2x^2 + 5$. Calcule $f^{(n)}(x), \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Sejam $y = \cos(u)$ e $u = u(x)$. Calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$.