Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Lista 3: Limite e continuidade
Cálculo I - 04287 e 00508 - Professora: Mariana G. Villapouca

1. Calcule, caso exista, o $\lim_{x\to 1} f(x)$ para cada função abaixo. Caso não exista, explique o porquê.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{se } x < 1 \\ x-2, & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ 2x, & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

2. Prove, usando a definição formal de limite, que $\lim_{x\to a} k = k$ para $k \in \mathbb{R}$ constante e que $\lim_{x\to a} x = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

3. Prove, usando as propriedades de limite, que $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$ onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ é um polinômio de grau n.

4. Defina $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Calcule $f'(a)$ em cada caso:

   (a) $f(x) = x^2$ e $a = 2$.

   (b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $a = 1$.

5. Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 1} \left(x^2 \cdot cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right) - cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)\right)$. Existe $\lim_{x\to 1} cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$?

6. Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 0} x^4 \cdot cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ e $\lim_{x\to 0} cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Caso não exista, explique o porquê.

7. Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot g(x)$ e $\lim_{x\to 0} g(x)$ onde $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

   Teorema da "Simplificação". *Sejam f e g duas funções tais que*

   $$f(x) = g(x), \ \ \forall (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f) \cap Dom(g)$$

   para algum $\delta > 0$. Então,

   $$se\ \exists \lim_{x\to a} g(x) \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x) \ \ e \ \ \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

8. Calcule os seguintes limites usando o Teorema da "Simplificação":

   (a) $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$

   (b) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{\sqrt{x^2-4}}$

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+x^2-x-1}$ (dica: fatore os polinômios)

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$

(e) $\lim_{x\to 8} \dfrac{256\cdot(\sqrt[3]{x}-2)}{x^3-8^3}$ (Não se esqueça de provar que $((\sqrt[3]{x})^2+2\cdot\sqrt[3]{x}+4)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.)

(f) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2-2x}-2}{1+\sqrt[3]{x}}$ (dica: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$)

(g) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ (primeiro exercício da lista de pré-cálculo)

(h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-5x+4}{|x-1|}$

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3(1-x^2)-2(1-x^3)}{(1-x^3)(1-x^2)}$

(j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{x}$

(k) $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(l) $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(m) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(t+h)^2-t^2}{h}$

(n) $\lim_{x\to 0} x^2\cdot tgh\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

(o) $\lim_{x\to 0} x^2\cdot arctg\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

9. Sabendo que para cada $x_0\in Dom(f)$ definimos a derivada de f no ponto x_0 como sendo $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se tal limite existe, calcule, se possível, $f'(x_0)$ em cada caso a seguir:

(a) $f(x)=K$, onde $K\in\mathbb{R}$ é uma constante.

(b) $f(x)=x$

(c) $f(x)=x^2$

(d) $f(x)=\sqrt{x}$

(e) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Observação.

$$f \text{ \textit{é contínua em} } a\in Dom(f)\Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

10. Sejam f e g duas funções contínuas em $a\in Dom(f)\cap Dom(g)$ e $k\in\mathbb{R}$ constante. Prove que:

(a) $k \cdot f$ é contínua em a

(b) $f + g$ é contínua em a

(c) $f \cdot g$ é contínua em a

(d) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a se $g(a) \neq 0$

11. Analise a continuidade das funções básicas apresentadas no início deste curso.

Observação.

f é descontínua em $a \Leftrightarrow f$ não é contínua em a ($a \notin Dom(f)$ ou $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$)

*Diremos que um ponto a é uma **descontinuidade removível** se*

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \;\; e \;\; \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

12. A função $g(x) = x^2 \cdot sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ é contínua em $x = 0$? Se é descontínua em $x = 0$, essa descontinuidade é removível?

13. Seja f uma função tal que $|f(x)| \leqslant x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Prove que f é contínua em $x = 0$.

14. Seja $h(x) = x^2 \cdot g(x)$ onde $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. A função h é contínua em $x = 0$?

15. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ 2x, & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$. A função f é contínua em $\mathbb{R}$? Caso negativo, quais são os pontos de descontinuidade? Essas descontinuidades são removíveis?

16. Quais os pontos onde $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ é contínua? Se houver descontinuidades, estas são removíveis?

17. Sabemos que $x = 2$ é um ponto de descontinuidade da função $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ (Por quê?). Essa descontinuidade é removível?

18. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } |x| < 1 \\ 1 - x^2, & \text{se } |x| \geqslant 1 \end{cases}$. Quais são os pontos onde f é contínua? Existem pontos de descontinuidade? Se existirem descontinuidades, elas são removíveis?

19. Seja $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1}, & \text{se } x \leqslant -1 \\ a \cdot x + b, & \text{se } -1 < x < 0 \\ |x^2 - 1|, & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$. Qual o domínio da f? Existem valores reais a e b tais que a função f seja contínua em seu domínio? Em caso afirmativo, determine esses valores usando os **limites laterais**. (Geometricamente é fácil verificar tal escolha, mas atenção ao que foi pedido. Portanto, neste exercício deve-se justificar a escolha de a e b através dos limites laterais). Esboce o gráfico da f.

20. Seja $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{2-x}, & \text{se } x < 1 \\ a \cdot x + b, & \text{se } 1 \leqslant x < 2 \\ |x^2 - 7x + 12|, & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$. Determine o domínio de f. Existem valores reais a e b de modo que f seja contínua em $x = 1$? E em $x = 2$? Justifique usando os limites laterais. A função é contínua em $\mathbb{R} - \{1, 2\}$? Existem descontinuidades? Existem descontinuidades removíveis? Esboce o gráfico da f

21. Seja $g(x) = \begin{cases} cos(x), & \text{se } x > 0 \\ a, & \text{se } x = 0 \\ x + 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$. A função g é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$? Existe algum $a \in \mathbb{R}$ tal que g seja continua em $x = 0$? Em caso afirmativo, determine-o. Quais são os valores de a tais que g é descontínua em $x = 0$? Quais são os valores de a tais que a é uma descontinuidade removível? (Justifique usando os limites laterais). Esboce o gráfico de g.

22. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 - 5x + 4|}{x - 1}, & \text{se } x < 1 \\ ax + b, & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}}, & \text{se } x > 2 \end{cases}$.

    (a) Determine o domínio de $f_1(x) = \dfrac{|x^2 - 5x + 4|}{x - 1}$ e analise $\lim\limits_{x \to 1} f_1(x)$.

    (b) Determine o domínio de $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ e analise $\lim\limits_{x \to 2} f_2(x)$.

    (c) Existem alguns valores a e b em $\mathbb{R}$ tais que f seja contínua em todo o seu domínio? Em caso afirmativo, determine esses valores.

23. Dê exemplo das seguintes situações:

    (a) Duas funções descontínuas cuja soma seja contínua.

    (b) Duas funções f e g tais que f seja contínua em $x = 0$, g seja descontínua em $x = 0$, mas no entanto $f \cdot g$ seja contínua em $x = 0$.

    (c) Duas funções que tenham descontinuidades não removíveis em $x = -1$, mas que a soma seja contínua em $x = -1$.

    (d) Uma função que tenha uma descontinuidade removível em $x = 1$.

    (e) Uma função descontínua em $x = 3$, mas que o seu módulo seja contínuo em $x = 3$.

    (f) Duas funções f e g tais que existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ e não existe $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$, mas mesmo assim $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \cdot g(x)$ existe.

    (g) Duas funções f e g tais que não existem os seus limites quando $x \to 0$, mas que exista $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

    (h) Uma função f na qual $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)|$ existe, mas $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe.

Teorema do Valor Intermediário (T.V.I.). *Se f é contínua em um intervalo $[a,b]$ e $[f(a) < d < f(b)$ ou $f(b) < d < f(a)]$, então existe um $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.*

Observação (Corolário do T.V.I.). *: Se f é contínua em um intervalo $[a,b]$ e $[f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(b) < 0 < f(a)]$, então existe um $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

24. Prove que existe um ponto de interseção entre o gráfico de $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ e o gráfico de $g(x) = 2x^2 - x + 2$ no intervalo $[0,1]$.

25. Verifique, usando o T.V.I., que existe pelo menos uma raiz real de $x^3 - 3x + 1$ em $(0,1)$.

26. Mostre que a função a função $f(x) = 1 - 2x^2 - arctg(x)$ atinge o valor $\frac{1}{2}$ no intervalo $[0,1]$.

27. Mostre que existe um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

    (a) $sen(x_0) - x_0 + 1 = 0$

    (b) $x_0^7 + x_0^5 + 1 = 0$

28. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } |x| < 2 \\ -|x|, & \text{se } |x| \geqslant 2 \end{cases}$. Verifique que:

    (a) $Dom(f) = \mathbb{R}$

    (b) $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$

    (c) $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

    Explique a razão desse exemplo não contradizer o Teorema do Valor Intermediário. (Dica: Para visualizar melhor o que está ocorrendo, esboce o gráfico de f).