1.				
2.			8.	
3.			9.	
4.			10.	
5.			11.	
6.			12.	
7.			Σ	

Universidade do Estado do Rio de Janeiro 19/10/2018

Nome 1: ______________________ Matrícula: ______
Nome 2: ______________________ Matrícula: ______
Nome 3: ______________________ Matrícula: ______
Nome 4: ______________________ Matrícula: ______

2ª Mini Tarefa - IME - 01 - 00508 - Turma 7

1. Seja f uma função tal que $|f(x)| \leqslant x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que f é contínua em $x = 0$.

> Sejam f e g duas funções tais que g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então $f \circ g$ é contínua em a.

2. Usando as propriedades da continuidade, determine todos os pontos onde $f(x) = \dfrac{sen^2(x^2) + ln(x^2+1)}{x^2 \cdot arctg(x)}$ é contínua.

3. Usando as propriedades da continuidade, analise a continuidade das funções trigonométricas sabendo que as funções $sen(x)$ e $cos(x)$ são contínuas em $\mathbb{R}$.

> Dizemos que f é diferenciável em $a \in Dom(f)$ se o limite $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe e é finito.

4. Calcule a derivada das seguintes funções nos pontos a indicados:

   Exemplo: $f(x) = K$ onde K é uma constante e $a \in \mathbb{R}$

   $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{K-K}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{0}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} 0 = 0$, pois $\dfrac{0}{x-a} = 0, \forall x \neq a$.

   Logo, vemos que a derivada da função constante é igual 0 para todo $a \in \mathbb{R}$, isto é, $\boxed{D_x(K) = 0.}$

   (a) $f(x) = x$ e $a \in \mathbb{R}$

   (b) $f(x) = x^2$ e $a \in \mathbb{R}$

> Dica: use $x^n - a^n = (x-a)\cdot(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$ nos dois itens (c) e (d).

   (c) $f(x) = x^n$ e $a \in \mathbb{R}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ e $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

   (e) $f(x) = \sqrt{x}$ e $a \in (0, +\infty)$

> Dica: Faça a seguinte mudança de variável no limite $\begin{cases} u = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = u^n \\ b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow a = b^n \\ x \to a \Rightarrow u = \sqrt[n]{x} \to \sqrt[n]{a} = b \end{cases}$ no item (f).

   (f) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ e $a \in Dom(f) - \{0\}$

5. Verifique que $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$, mas não é diferenciável em $x = 0$.

6. Encontre as assíntotas horizontais de $tgh(x)$ e calcule o limite $\lim\limits_{x\to-\infty} tgh\left(\dfrac{4x^3-2}{|1-2x|}\right)$.

7. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2-5x+4|}{x-1}, & \text{se } x < 1 \\ ax+b, & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}, & \text{se } x > 2 \end{cases}$.

   (a) Determine o domínio de $f_1(x) = \dfrac{|x^2-5x+4|}{x-1}$ e analise $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)$.

   (b) Determine o domínio de $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$ e analise $\lim\limits_{x\to 2} f_2(x)$.

   (c) Existem alguns valores a e b em $\mathbb{R}$ tais que f seja contínua em todo o seu domínio? Em caso afirmativo, determine esses valores.

8. Dê exemplo das seguintes situações:

   (a) Duas funções descontínuas cuja soma seja contínua.

   (b) Duas funções f e g tais que f seja contínua em $x = 0$, g seja descontínua em $x = 0$, mas no entanto $f \cdot g$ seja contínua em $x = 0$.

   (c) Duas funções que tenham descontinuidades não removíveis em $x = -1$, mas que a soma seja contínua em $x = -1$.

   (d) Uma função que tenha uma descontinuidade removível em $x = 1$.

   (e) Uma função descontínua em $x = 3$, mas que o seu módulo seja contínuo em $x = 3$.

   (f) Duas funções f e g tais que existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e não existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, mas mesmo assim $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)$ existe.

   (g) Duas funções f e g tais que não existem os seus limites quando $x \to 0$, mas que exista $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

   (h) Uma função f na qual $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)|$ existe, mas $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe.

9. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{se } |x| < 2 \\ -|x|, & \text{se } |x| \geqslant 2 \end{cases}$. Verifique que:

   (a) $Dom(f) = \mathbb{R}$

   (b) $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$

   (c) $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

   Explique a razão desse exemplo não contradizer o Teorema do Valor Intermediário. (Dica: Para visualizar melhor o que está ocorrendo, esboce o gráfico de f).

10. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2-2x}-2}{1+\sqrt[3]{x}}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(1-x^2)-2(1-x^3)}{(1-x^3)(1-x^2)}$

   (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} arctg\left(\dfrac{x^4-2x+1}{x^3+4}\right)$

   (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{4x^2+3x} - \sqrt[3]{64x^3+3}$

11. Sejam $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} P(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to -\infty} P(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

12. Dê exemplos onde encontramos as indetermingções $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ e $\infty \cdot 0$ e que após manipulações algébricas conseguimos calcular o limite.