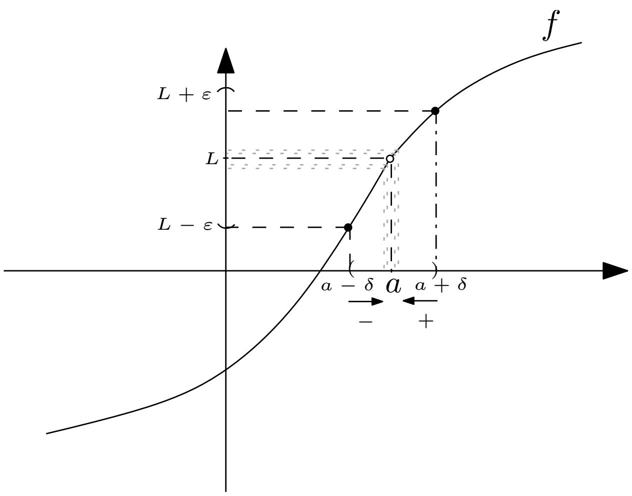
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I e Cálculo Diferencial e Integral I - Professora: Mariana G. Villapouca

Limite e continuidade

Aula 11 - Definições de limite e limite lateral

<u>Ideia intuitiva:</u> Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L, e escrevemos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, se os valores $f(x)$ estão tão próximos quanto se queira de L, quando fazemos os valores de x suficientemente próximos de a.



$$x > a$$

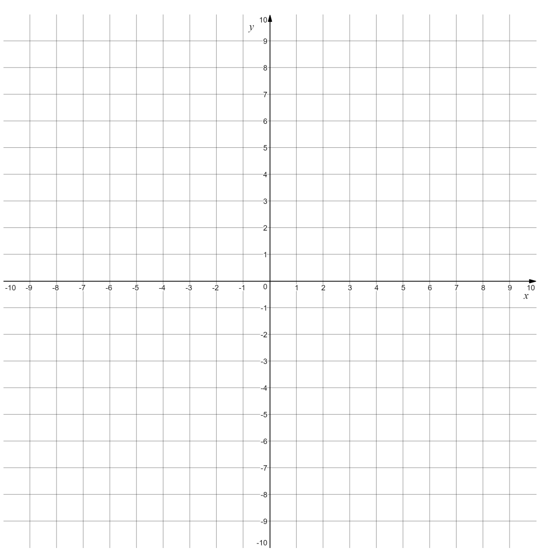
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

$$x < a$$

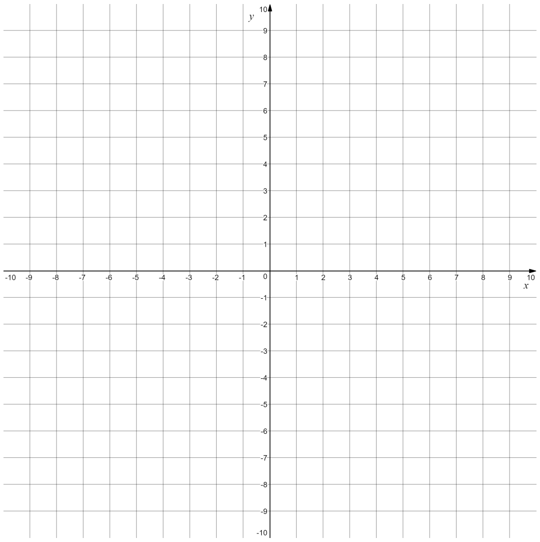
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Exemplo 1. *Seja* $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & se\ \ x<1 \\ x-2, & se\ \ x \geqslant 1 \end{cases}$. *Use a* ***ideia intuitiva de limite*** *para calcular* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *caso exista.*



Exemplo 2. *Seja* $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & se \ \ x < 1 \\ x-4, & se \ \ x \geqslant 1 \end{cases}$. *Use a* ***ideia intuitiva de limite*** *para calcular* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *caso exista.*



1. **Definição de limite**

Definição 1 (Limite)**.** Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L, isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

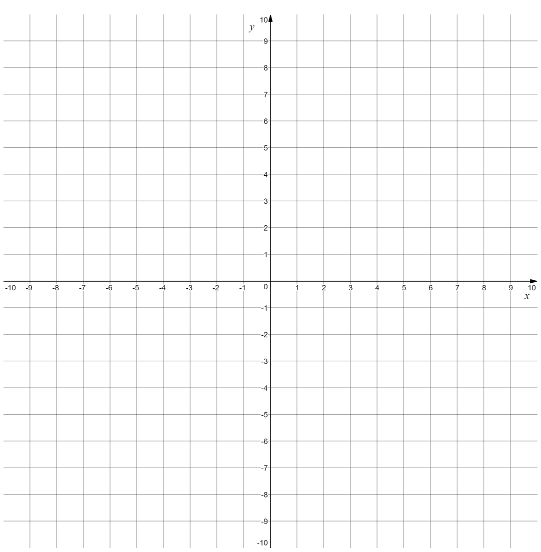
se para todo intervalo da forma $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, existe um intervalo da forma $(a-\delta, a+\delta)$ tal que

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a+\delta) \subset Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Em outras palavras, $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \ \text{ e } \ x \in Dom(f) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 3. *Calcule usando a* ***definição formal*** $\lim_{x\to 1} x$.



Observação 1. $\boxed{\textit{Dizemos que uma função } f \textit{ é contínua em } a \in Dom(f) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$

Exercício 1. *Verifique se as funções dos exemplos anteriores são contínuas em $x = 1$.*

Teorema 1 (Unicidade do limite)**.** *Se $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.*

demonstração: Tome $\varepsilon > 0$ qualquer. Temos que

- Como $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então $|f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- Como $\lim_{x\to a} f(x) = L_2 \Rightarrow \exists \delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então $|f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Assim se tomarmos $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, tem-se que para cada $x \in Dom(f)$

- se $0 < |x-a| < \delta$, então $|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leqslant |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Logo, $L_1 = L_2$. ■

2. **Limites laterais**

Definição 2 (Limite à direita)**.** Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é igual a L, isto é,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L,$$

se para todo intervalo da forma $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe um intervalo da forma $(a, a + \delta) \subset Dom(f)$ tal que

$$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Em outras palavras, $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in Dom(f)$ e

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 3 (Limite à esquerda)**.** Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é igual a L, isto é,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$

se para todo intervalo da forma $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe um intervalo da forma $(a - \delta, a) \subset Dom(f)$ tal que

$$x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Em outras palavras, $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in Dom(f)$ e

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Teorema 2. *Temos que* $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$, *se e somente se,* $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\exists \delta > 0$ *tal que* $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f)$.

demonstração:

($\Rightarrow$) Se $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Logo, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

- $x \in (a-\delta, a) \subset Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$
- $x \in (a, a+\delta) \subset Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$

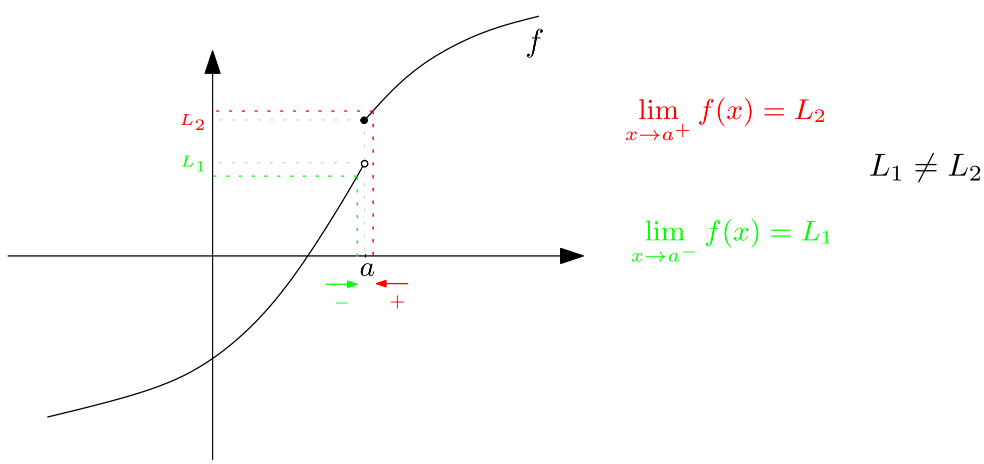
($\Leftarrow$) Se $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ então para todo $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

- $x \in (a, a+\delta_1) \subset Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$
- $x \in (a-\delta_2, a) \subset Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Assim, tomando $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, temos que se $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f)$, então $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Portanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

$\blacksquare$

Observação 2. *Nem sempre os limites laterais existem e nem sempre quando os limites laterais existem eles coincidem.*

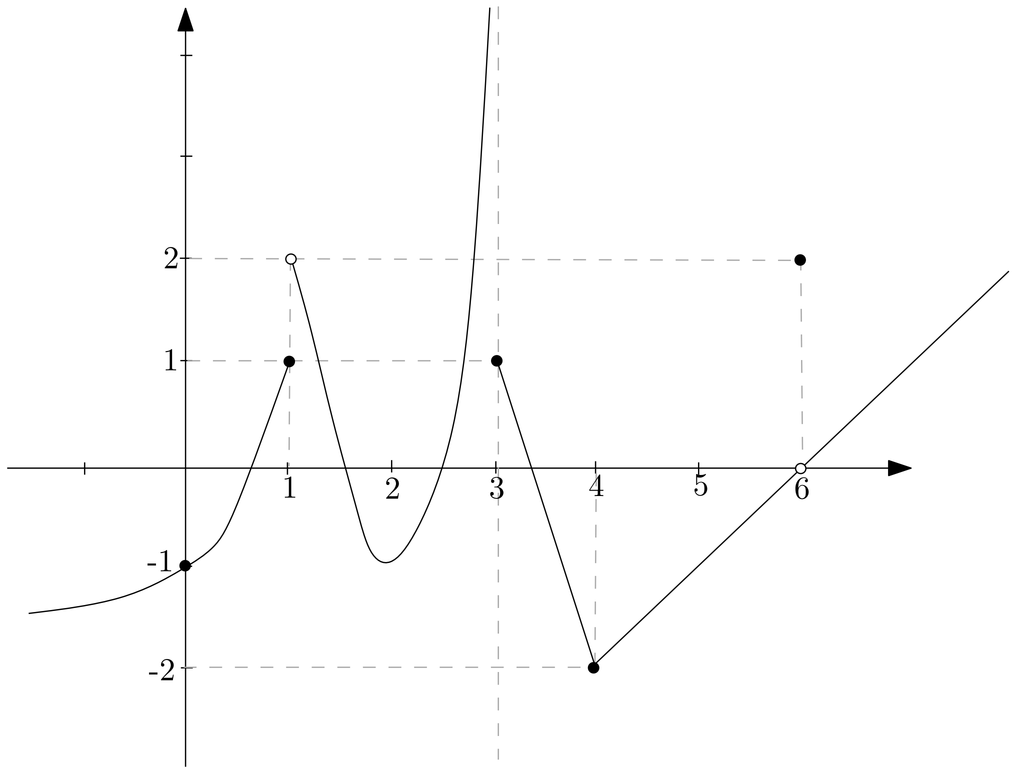


Observação 3.

(a) *Se* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, *então* $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(b) *Se* $\nexists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *ou* $\nexists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *e* $Dom(f)$ *contém uma vizinhança da forma* $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, *então* $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Exemplo 4. *Seja f uma função cujo o gráfico está esboçado a seguir. Calcule, caso existam, os limites e verifique a continuidade nos pontos indicados.*



- $f(1) =$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\lim_{x\to 1} f(x)$
  E a continuidade em x=1?

- $f(3) =$ $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ $\lim_{x\to 3} f(x)$
  E a continuidade em x=3?

- $f(4) =$ $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ $\lim_{x\to 4} f(x)$
  E a continuidade em x=4?

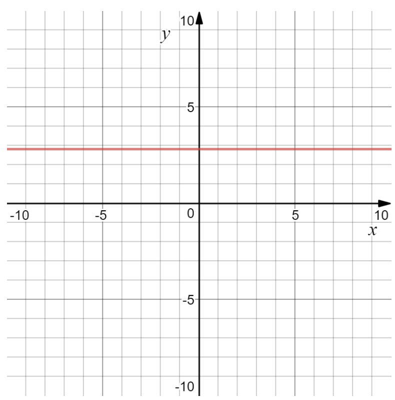
- $f(6) =$ $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ $\lim_{x\to 6^+} f(x)$ $\lim_{x\to 6} f(x)$
  E a continuidade em x=6?

Exemplo 5. *Calcule, caso exista, o* $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.

Exercício 2. *Calcule, caso exista, o* $\lim_{x\to 0} |x|$.

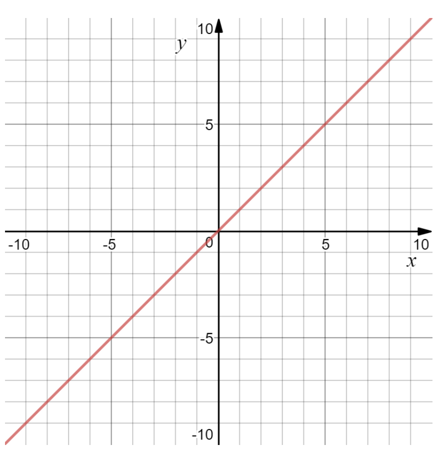
3. **Limite de algumas funções básicas**

Função constante: Seja $f(x) = K$, onde $K \in \mathbb{R}$ é constante.



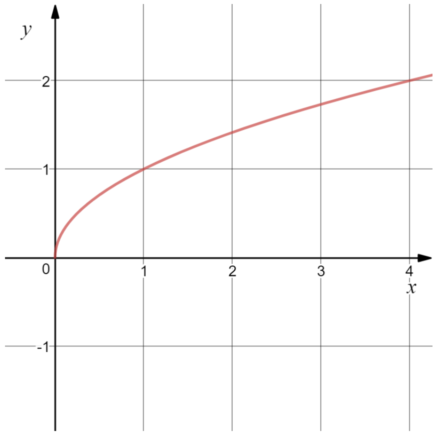
$\lim_{x\to a} K = K = f(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Função linear: Seja $f(x) = x$.



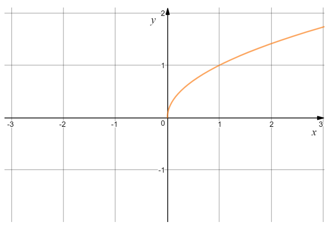
$\lim_{x\to a} x = a = f(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

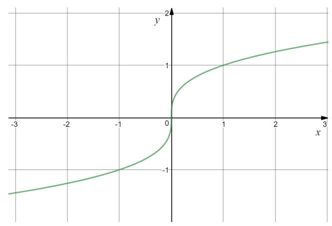
Função raiz quadrada: Seja $f(x) = \sqrt{x}$.



$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a} = f(a),\ \forall a \in [0, +\infty).$$

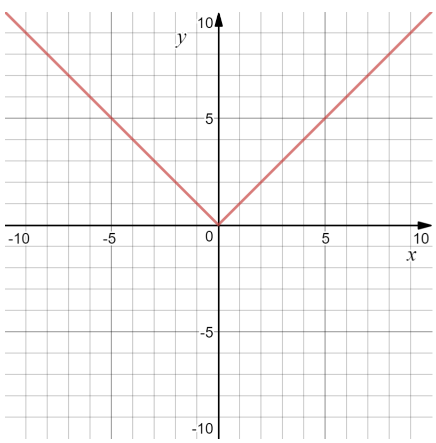
Função raiz n-ésima: Seja $f(x) = \sqrt[n]{x}$ onde $n = 2, 3, 4, \ldots$.





$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} = f(a), \forall a \in Dom(\sqrt[n]{x}).$$

Função modular: Seja $f(x) = |x|$.



$$\lim_{x\to a} |x| = |a| = f(a),\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I e Cálculo Diferencial e Integral I - Professora: Mariana G. Villapouca

Limite e continuidade

Aula 12 - Propriedades do limite

4. Propriedades do limite

Sejam f, g duas funções tais que existem os limite $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ e $K \in \mathbb{R}$ uma constante, então:

1. $\lim_{x \to a} K \cdot f(x) = K \lim_{x \to a} f(x) = K \cdot L_1$
2. $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$
3. $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L_1 L_2$
4. $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$
5. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n = (L_1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.
6. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e se $L_1 \in Dom(\sqrt[n]{x})$.
7. $\lim_{x \to a} ln(f(x)) = ln(\lim_{x \to a} f(x)) = ln(L_1)$ se $L_1 \in Dom(ln(x))$.
8. $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L_1|$

demonstração:

1. Dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$ então
$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{|K|}$$
Assim, se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$ então
$$|K \cdot f(x) - K \cdot L_1| = |K| \cdot |f(x) - L_1| < |K| \cdot \frac{\varepsilon}{|K|} = \varepsilon.$$

2. Dado $\varepsilon > 0$,
    - existe $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
    - existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_2) \Rightarrow |f(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

    Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, tem-se que se $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ então
$$|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| \leqslant |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Dado $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

   - existe $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \dfrac{1}{n}$
   - existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2) \Rightarrow |f(x) - L_2| < \dfrac{1}{n}$

   Tome $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, se $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ então

$$\begin{aligned}
|f(x)\cdot g(x) - L_1 \cdot L_2| &= |f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot L_2 + f(x)\cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| \\
&= |f(x)[g(x) - L_2] + L_2[f(x) - L_1]| \\
&\leqslant |f(x)| \cdot |g(x) - L_2| + |L_2| \cdot |f(x) - L_1| \\
&\leqslant |f(x)| \cdot \frac{1}{n} + |L_2| \cdot \frac{1}{n} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{n} + |L_1|\right) \cdot \frac{1}{n} + |L_2| \cdot \frac{1}{n} \\
&\leqslant \frac{1}{n^2} + |L_1| \cdot \frac{1}{n} + |L_2| \cdot \frac{1}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 0
\end{aligned}$$

   pois $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \dfrac{1}{n} \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{1}{n} + |L_1|$.

   Portanto, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x) - L_1 \cdot L_2) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$.

4. Dado $\varepsilon > 0$

   - existe $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$
   - existe $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2) \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$
   - existe $\delta_3 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_3, a) \cup (a, a+\delta_3) \Rightarrow |L_2^2| - |g(x)\cdot L_2| \leqslant |g(x)L_2 - L_2^2| < \dfrac{L_2^2}{2}$.
     Daí, tem-se que $\dfrac{1}{|g(x)L_2|} < \dfrac{L_2^2}{2}$ para todo $x \in (a-\delta_3, a) \cup (a, a+\delta_3)$.

   Tome $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$. Assim, se $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ então

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_1}{L_2}\right| = \left|\frac{L_2 f(x) - L_1 g(x)}{g(x)L_2}\right| = |L_2 f(x) - L_1 g(x)| \cdot \frac{1}{|g(x)L_2|} \leqslant |L_2 f(x) - L_1 g(x)| \cdot \frac{L_2^2}{2} \overset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

   Portanto, $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{L_1}{L_2}\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

Os itens (e), (f), (g) e (h) são consequências da continuidade das funções x^n, $\sqrt[n]{x}, ln(x)$ e $|x|$ junto com a propriedade da composta que veremos posteriormente. ■

Observação 4. *Todas as propriedades listadas acima também são válidas para* $\lim\limits_{x\to a^+}$ *e* $\lim\limits_{x\to a^-}$ *fazendo as alterações necessárias.*

Exemplo 6. *Calcule, caso exista, o limite* $\lim_{x \to -1} \dfrac{(x^3-4)(x^5-6)}{ln(x^2+1)}$

Exemplo 7. *Calcule, caso exista, o limite* $\lim_{x \to -2} \sqrt[3]{|x^3+1|}$

Exercício 3. *Prove, usando as propriedades acima, que para todo* $a \in \mathbb{R}$, *temos que* $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$, *onde* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *é um polinômio de grau* n *qualquer.*

Observação 5. *Se* $y = g(x)$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = b$, *então*

$$\lim_{x \to a}(f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f(g(x)) = \lim_{y \to b} f(y).$$

Teorema 3 (do Confronto)**.** *Sejam* f, g *e* h *três funções tais*

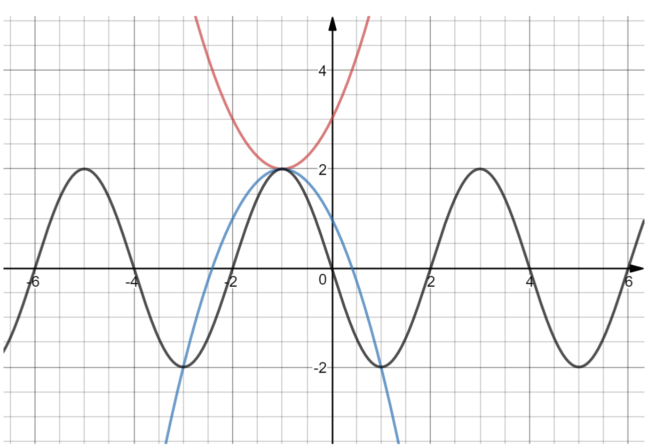
$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

para todo $x \in (a-\delta, a) \cup (a+\delta) \subset (Dom(f) \cap Dom(g) \cap Dom(h))$. *Se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

então

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$



`https://www.desmos.com/calculator/oesft3qxq5` *demonstração:* Dado $\varepsilon > 0$ temos que

- $\exists \delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1) \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$
- $\exists \delta_2 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1) \Rightarrow h(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

Assim, tomando $\delta_0 = min\{\delta_1, \delta_2, \delta\}$ obtemos que

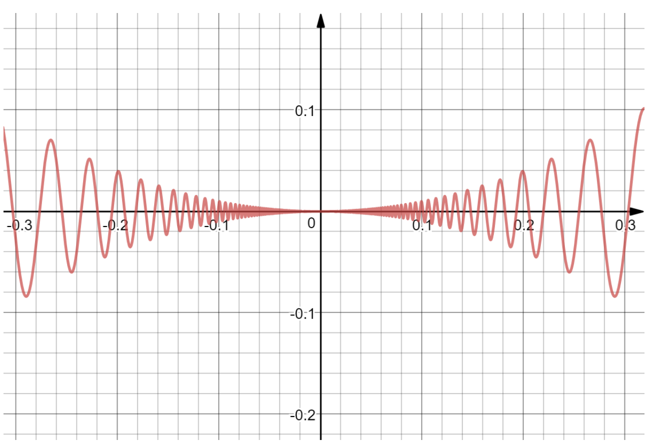
- se $x \in (a - \delta_0, a) \cup (a, a + \delta_0) \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L + \varepsilon$

Portanto, $\lim_{x \to a} g(x) = L$. ■

Corolário 1 (Teorema do anulamento)**.** *Sejam f e g funções. Se*

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$
2. $-M \leqslant g(x) \leqslant M$ *para todo* $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \subset Dom(f)$

então, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.



https://www.desmos.com/calculator/kusgbcd3ew

demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1)$ então $|f(x)| = |f(x) - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Tome $\delta_2 = min\{\delta_1, \delta\}$. Daí, se $x \in (a - \delta_2, a) \cup (a, a + \delta_2)$ então

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

Portanto, $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$. ■

Exemplo 8. *Calule, caso exista,* $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pergunta: Existe $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$?

Exercício 4. *Use um recurso computacional para desenhar o gráfico de* $x^2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ *para verificar o resultado encontrado no exemplo anterior.*

Exercício 5. *Se* $|f(x)| \leqslant x^2$ *para todo* $x \in Dom(f)$, *verifique que* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exercício 6. *Calcule, caso exista, o limite* $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot g(x)$ *onde* $g(x) = \begin{cases} 1, & se\ \ x \in \mathbb{Q} \\ -1, & se\ \ \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Pergunta: Existe $\lim_{x\to 0} g(x)$?

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I e Cálculo Diferencial e Integral I - Professora: Mariana G. Villapouca

Limite e continuidade

Aula 13 - Teorema da Simplificação

4. Propriedades do limite (continuação)

Teorema 4 (da "Simplificação")**.** *Sejam f e g duas funções tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f) \cap Dom(g)$ para algum $\delta > 0$. Então,*

$$se\ \exists \lim_{x\to a} g(x) \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x) \ \ e \ \ \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

demonstração: Tome $\varepsilon >$ qualquer. Como $\lim_{x\to a} g(x) = L$ então $\exists \delta_1 > 0$ tal que se $x \in (a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1)$ então $|g(x) - L| < \varepsilon$. Tomando $\delta_2 = min\,\{\delta, \delta_1\} > 0$, obtemos que se $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2)$ então

- $f(x) = g(x)$
- $|g(x) - L| < \varepsilon$

Logo, $|f(x) - L| = |g(x) - L| < \varepsilon$ se $x \in (a-\delta_2, a) \cup (a, a+\delta_2)$.

Portanto, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$. ■

Exemplos usando o Teorema da Simplificação: Em cada item determine o domínio da função, se possível calcule o limite indicado e analise a continuidade da função em tal ponto.

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)(x+3)}$
2. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x}}$
3. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{|x-3|}{\sqrt{x^2-9}}$
4. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+x^2-x-1}$
5. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}$
6. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
7. $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2-2x}-2}{1+\sqrt[3]{x}}$

(separar umas 3 folhas para a resolução dos exemplos)

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I e Cálculo Diferencial e Integral I - Professora: Mariana G. Villapouca

Limite e continuidade

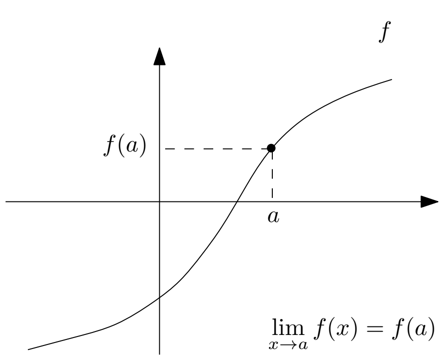
Aula 14 - Continuidade

5. Continuidade

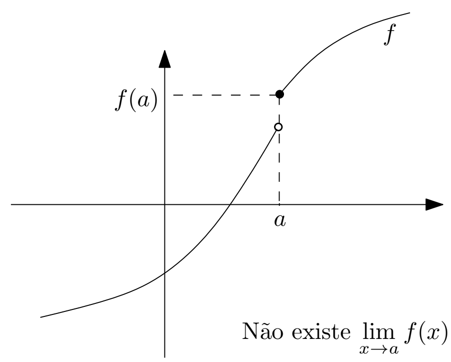
Definição 4. Sejam f uma função e a um ponto no domínio de f. Dizemos que

$$\boxed{f \text{ é contínua em um ponto } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

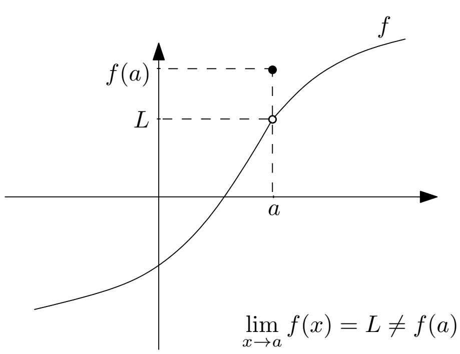
Se f não é contínua em um ponto a, dizemos que f é descontínua em a. Um ponto de descontinuidade a é removível se $\exists \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$. Dizemos que uma função f é contínua se ela é contínua em todos os pontos do seu domínio e é contínua em um intervalo I se ela é contínua em cada ponto deste intervalo I.



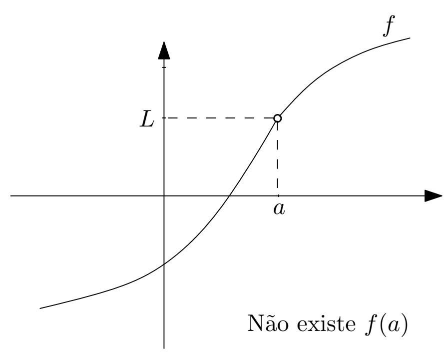
f é contínua em a



f é descontínua em a



f é descontínua em a



f é descontínua em a

Propriedades: Sejam f e g duas funções contínuas em um ponto $a \in Dom(f) \cap Dom(g)$ e K uma constante, então:

1. $K \cdot f$ é contínua em a,
2. $f + g$ é contínua em a,
3. $f \cdot g$ é contínua em a,
4. $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a se $g(a) \neq 0$.

demonstração: Exercício!

Na seção 3 da aula 11 vimos que:

- A função constante é contínua em $\mathbb{R}$.
- A função linear é contínua em $\mathbb{R}$.
- A função raiz quadrada é contínua em $[0, +\infty)$.
- A função raiz n-ésima é contínua em seu domínio.
- A função modular é contínua em $\mathbb{R}$.
- A função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.

Observação 6. *As funções exponencial, logarítmica e as trigonométricas são contínuas em seus domínios.*

Exemplos:

1. Se $|f(x)| \leqslant x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então f é contínua em $x = 0$?.

2. A função $f(x) = x^2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ é contínua em $x = 0$? E a função $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se} x \neq 0 \end{cases}$?

3. A função $x^2 \cdot g(x)$ onde $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ é contínua em $x = 0$?

4. Quais são os pontos onde $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ é contínua em x=0?

5. A descontinuidade $x = 2$ da função $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ é removível?

6. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } |x| < 1 \\ 1 - x^2, & \text{se } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

Quais são os pontos que f é contínua? Existem pontos de descontinuidade? Caso existam, esses pontos são removíveis?

7. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1}, & \text{se } x \leqslant -1 \\ ax+b, & \text{se } -1 < x < 0 \\ |x^2-1|, & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Qual é o domínio? Existem valores reais a e b tais que a função f seja contínua em seu domínio? Em caso afirmativo, determine esses valores usando os limites laterais.

Teorema 5 (limite da composta)**.** Sejam f e g duas funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e g é contínua no ponto b. Então:

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

Em particular, se no teorema acima tivermos $b = f(a)$, isto é, se f é contínua em a teremos o seguinte:

Teorema 6 (Continuidade da composta)**.** Sejam f e g duas funções. Se g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$, então $f \circ g$ é contínua em a. Isto é, se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(g(a))$, então

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(a).$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "f \circ g"'] & g(x) \arrow[r, mapsto, "f"] & f(g(x)) \end{tikzcd}$$

Exemplo 9. *Determine o conjuntos dos pontos onde* $f(x) = \dfrac{sen^2(x^2) + ln(x^2+1)}{x^2 \cdot arctg(x)}$.

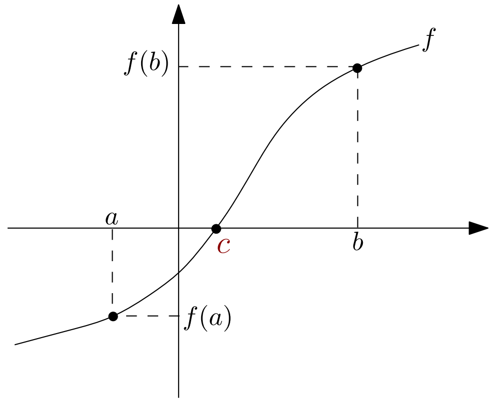
Exercício 7. *Analise a continuidade das funções trigonométricas sabendo que as funções seno e cosseno são contínuas em seus domínios.*

Exercício 8. *Verifique a continuidade das funções $ln(x)$, $arcsen(x)$, $arccos(x)$ e $arctg(x)$ usando o fato das funções e^x, $sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$ serem contínuas em seus domínios.*

Definição 5. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, diremos que f é contínua em $[a,b]$ se:*

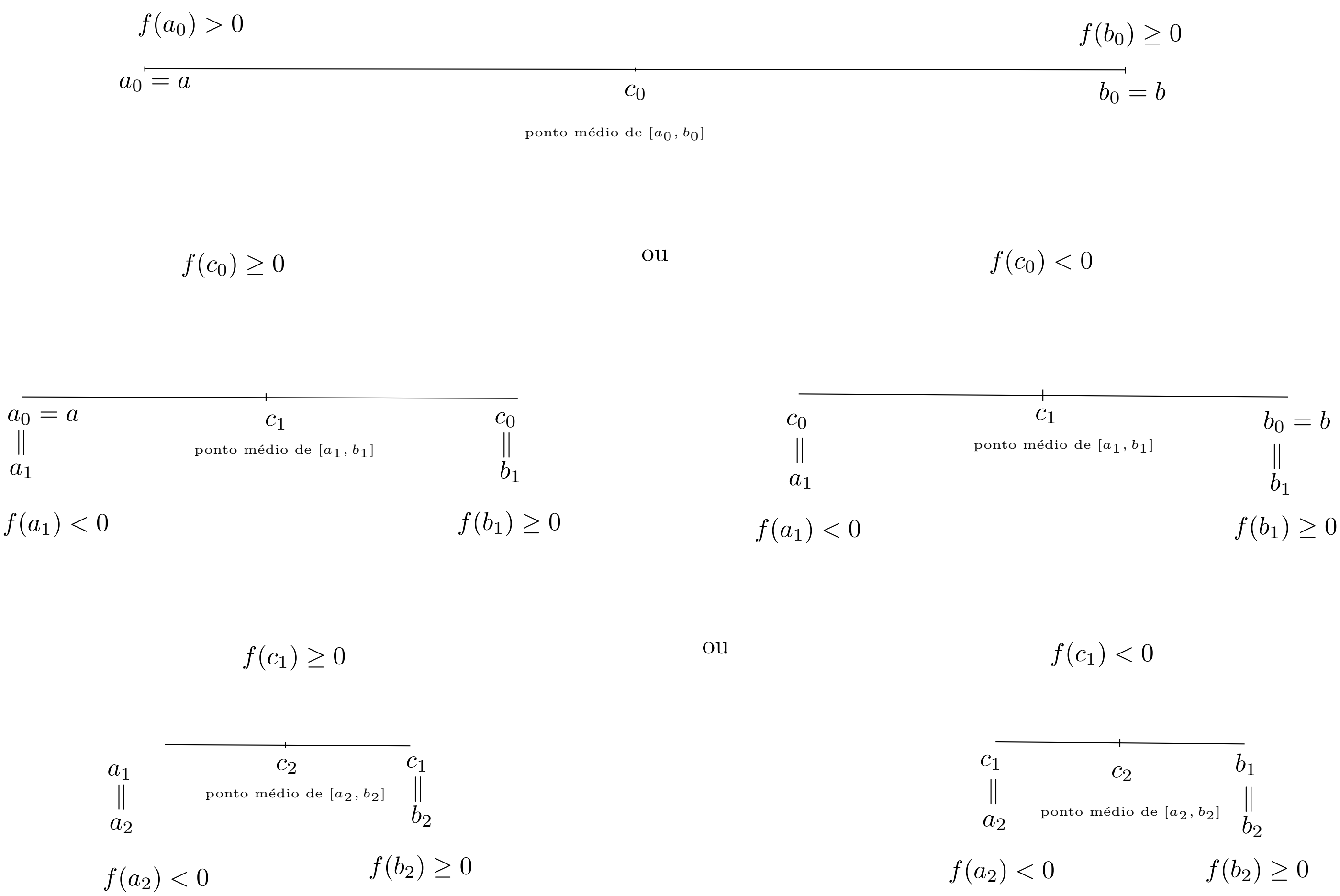
1. *f é contínua em (a,b)*
2. *$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$*
3. *$\exists \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$*

Teorema 7 (de Bolzano)**.** *Se f é contínua em $[a,b]$, $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais contrários, então existe pelo menos um $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*



demonstração:

Caso1: $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$



$$\vdots$$

Assim, temos que $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots [a_n, b_n] \supset \cdots$ onde $f(a_i) < 0$ e $f(b_i) \geqslant 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Logo, pelo Teorema do intervalos encaixantes, existe $c \in \bigcap_{i=0}^{+\infty} [a_i, b_i]$, isto é, existe um c tal que $a_n \leqslant c \leqslant b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por um lado, temos, pela construção dos intervalos, que

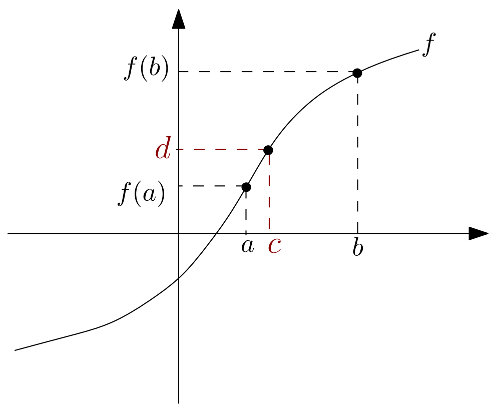
$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}| = \frac{1}{2}\frac{1}{2}|b_{n-2} - a_{n-2}| = \cdots = \frac{1}{2^n}|b_0 - a_0| = \frac{1}{2^n}|b - a| \to 0$$

quando $n \to +\infty$. Portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ e, pelo Teorema do confronto, temos também que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$.

Por outro, pela continuidade de f tem-se que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$, logo devemos ter que $f(c) < 0$ e $f(c) \geqslant 0$, portanto $f(c) = 0$.

O caso 2 onde $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ é análogo. ■

Teorema 8 (do Valor Intermediário)**.** *Se uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e se d é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.*



demonstração: Caso 1: $f(a) < d < f(b)$.

Como $g(x) = f(x) - d$ é contínua em $[a, b]$, $g(a) = f(a) - d < 0$ e $g(b) = f(b) - d > 0$, temos, pelo Teorema de Bolzano, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, isto é, $g(c) = f(c) - d = 0 \Rightarrow f(c) = d$.

Caso 2: $f(a) > d > f(b)$ é análogo ao caso 1. ■

Observação 7. *Uma aplicação é a garantia da existência de raízes de algumas equações.*

Exemplo 10. *Prove, usando o T.V.I ou o Teorema de Bolzano, que existe pelo menos 1 raiz de $x^3 - 3x + 1$ em $(0, 1)$.*

Exercício 9. *Prove que $x^3 - 4x + 2$ possui 3 raízes reais distintas.*

Exercício 10. *Mostre que a função* $f(x) = 1 - 2x^2 - arctg(x)$ *atinge o valor* $\frac{1}{2}$ *no intervalo* $[0, 1]$.

Exercício 11. *Diga se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa. A função* $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & se\ |x| < 2 \\ -|x|, & se\ |x| \geqslant 2 \end{cases}$ *contradiz o Teorema de Bolzano, pois* $f(1) = 2 > 0$ *e* $f(3) = -3 < 0$*, mas pelo gráfico vemos que* $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema 9 (de Weierstrass ou Teorema do Valor extremo)**.** *Se* f *é contínua em* $[a, b]$*, então existem* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *tais que*

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \forall x \in [a, b].$$

demonstração:

Como f é contínua em $[a, b]$ (intervalo fechado e limitado), então f é limitada em $[a, b]$. Sejam

- $M = sup\,\{f(x) \ | \ x \in [a, b]\}$
- $m = inf\,\{f(x) \ | \ x \in [a, b]\}$

Logo, $m \leqslant f(x) \leqslant M, \forall x \in [a, b]$

Afirmação: Existe $x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_2) = M$.

Suponha, por absurdo, que $f(x) < M, \forall x \in [a,b]$, então a função $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ é contínua em $[a,b]$. Daí, temos que g é limitada em $[a,b]$, logo existe um $\beta > 0$ tal que

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < \beta, \forall x \in [a,b]$$

daí $f(x) < M - \dfrac{1}{\beta} < M = sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}, \forall x \in [a,b]$, contrariando o fato de M ser supremo de $f(x)$ em $[a,b]$.

Portanto existe $x_2 \in [a,b]$ tal que $f(x_2) = M$.

Afirmação: Existe $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) = m$ é análoga.

$\blacksquare$

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I e Cálculo Diferencial e Integral I - Professora: Mariana G. Villapouca

Limite e continuidade

Aula 15 - Limite infinito e no infinito

6.Limite infinito

Definição 6 (Limite infinito)**.** Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a $+\infty$, isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

se para todo número positivo M, existe um intervalo da forma $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f)$ tal que

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > M.$$

E dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a $-\infty$, isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

se para todo número negativo N, existe um intervalo da forma $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f)$ tal que

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < N.$$

Observação 8. *De maneira semelhante definimos*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty, \quad e \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty,$$

mudando o intervalo para $(a, a+\delta)$ *e* $(a-\delta, a)$*, respectivamente, na definição anterior.*

Observação 9 (Atenção!!!)**.** *O limite de* $f(x)$ *quando* $x \to a$ *ou* a^- *ou* a^+ *ser igual à* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *significa que o limite não existe!*

Propriedades:

1. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então:

   - $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se existe um $\delta > 0$ tal que $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0, \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f) \cap Dom(g)$,

- $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ se existe um $\delta > 0$ tal que $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0, \forall x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \subset Dom(f) \cap Dom(g)$.

2. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ ou $-\infty$ e $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$ ou $-\infty$, então:

   - $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L \pm \infty = \pm\infty$
   - Se $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, então
   $$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot(+\infty) = \begin{cases} \infty, & L > 0 \\ -\infty, & L < 0 \\ \text{indeterminado}, & L = 0 \end{cases}$$
   - Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, então
   $$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot(-\infty) = \begin{cases} -\infty, & L > 0 \\ +\infty, & L < 0 \\ \text{indeterminado}, & L = 0 \end{cases}$$
   - Se $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$
     - $\lim_{x\to a}[g(x) + h(x)] = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$
     - $\lim_{x\to a}[g(x)\cdot h(x)] = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$
   - Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$
     - $\lim_{x\to a}[g(x) + h(x)] = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$
     - $\lim_{x\to a}[g(x)\cdot h(x)] = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$
   - Se $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$
     - $-\infty + (+\infty) = \infty - \infty$ é indeterminado!!!!!
     - $\lim_{x\to a}[g(x)\cdot h(x)] = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$

Observação 10. *<u>**Atenção!!!!**</u> Cuidado com as indeterminações: $\dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}, \infty - \infty, \infty \cdot 0, 0^0, 1^\infty$ e ∞^0* *essas expressões nada dizem sobre o limite!!!!*

Vamos analisar alguns exemplos de tais indeterminações:

- $\boxed{\textit{Caso } \dfrac{\infty}{\infty}}$: *Sejam $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{x}$ e $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Note que*
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) =$$
  - $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$
  - $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{h(x)} =$

- $\boxed{Caso\ \dfrac{0}{0}}$: *Sejam* $f(x) = h(x) = \sqrt[3]{x-1} - 1$ *e* $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2}$. *Note que*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) =$$

  - $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

  - $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{h(x)} =$

- $\boxed{Caso\ \infty - \infty}$: *Sejam* $f(x) = h(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$ *e* $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. *Note que*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) =$$

  - $\lim\limits_{x\to 0} f(x) - g(x) =$

  - $\lim\limits_{x\to 0} f(x) - h(x) =$

- $\boxed{Caso\ 0\cdot\infty}$: *Sejam* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x \cdot sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *e* $h(x) = ln(x)$. *Note que*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \ e \ \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \ e \ \lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$$

  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \cdot g(x) =$

  - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \cdot h(x) =$

Os demais casos serão avaliados quando tivermos feito a Regra de L'Hôspital.

7. Limite no infinito

Definição 7. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ é igual a L, isto é,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L,$$

se para todo intervalo da forma $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, existe um número positivo M tal que

$$x > M, x \in Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

E dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a $-\infty$ é igual a L, isto é,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L,$$

se para todo intervalo da forma $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, existe um número negativo N tal que

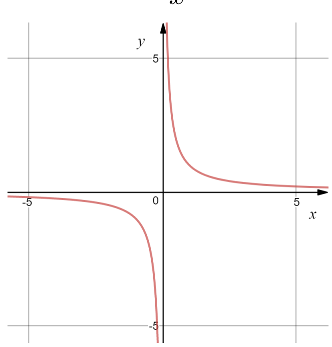
$$x < N, x \in Dom(f) \Rightarrow f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon).$$

Propriedades:

1. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{K}{x^n} = 0, n \in \mathbb{N}^*$ e $K \in \mathbb{R} - \{0\}$
2. Se $K \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, então $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{K}{f(x)} = 0$
3. Se existem $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$ e $K \in \mathbb{R}$, então
   - $\lim_{x\to\pm\infty} (Kf(x) + g(x)) = K \lim_{x\to\pm\infty} f(x) + \lim_{x\to\pm\infty} g(x)$
   - $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to\pm\infty} g(x)\right)$
   - $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)}$ se $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) \neq 0$.

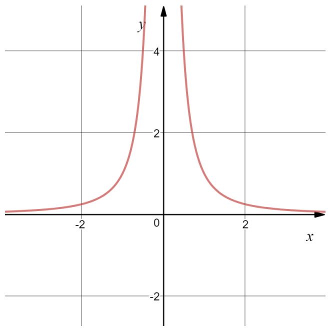
Exemplos de limite infinito e no infinito: Em cada item determine o domínio da função e, se possível, calcule o limite indicado:

1. Seja $f(x) = \frac{1}{x}$. Temos que $Dom(f) =$



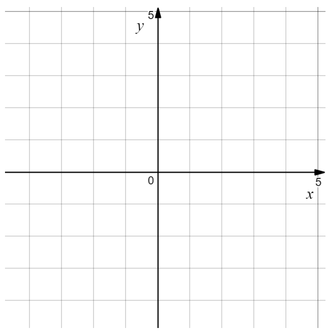
   - $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$
   - $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$
   - $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} =$
   - $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} =$

2. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Temos que $Dom(f) =$



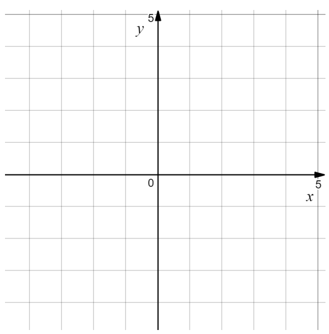
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} =$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} =$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} =$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^2} =$

3. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Temos que $Dom(f) =$



- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2} =$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2} =$
- $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2} =$
- $\displaystyle\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2} =$

4. Seja $f(x) = \dfrac{3-x}{2-x} = \dfrac{1}{2-x} + 1$. Temos que $Dom(f) =$

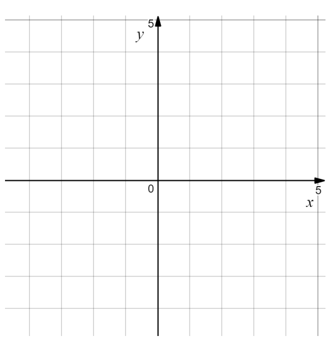


- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2-x} + 1 =$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2-x} + 1 =$
- $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{1}{2-x} + 1 =$
- $\displaystyle\lim_{x\to2^-} \frac{1}{2-x} + 1 =$

5. **Exercício:** $\displaystyle\lim_{x\to0} \sqrt[3]{x+8} + \frac{1}{x^2}$

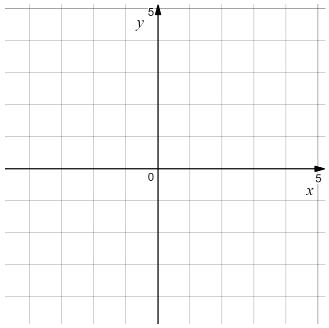
6. **Exercício:** $\displaystyle\lim_{x\to0} -\frac{1}{x^2}$

7. Seja $f(x) = tg(x)$. Temos que $Dom(f) =$



- $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tg(x)$
- $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tg(x)$

8. Seja $f(x) = x$. Temos que $Dom(f) =$



- $\lim_{x \to +\infty} x =$

- $\lim_{x \to -\infty} x =$

9. $\lim_{x \to +\infty} (2x - x) =$

10. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} =$

11. $\lim_{x \to +\infty} (-2x^3 + 4x - 3) =$

12. $\lim_{x \to -\infty} (-2x^3 + 4x - 3) =$

13. Seja a_n diferente de 0.
$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$

14. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 4}{x^5 - 2x + 1}$

15. **Exercício:** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 4}{x^5 - 2x + 1}$

16. **Exercício:** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^5 - 2x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x + 4}$

17. **Exercício:** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 2x + 1}{x^3 + 4}$

18. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 - 2}{1 - 2x}$

19. **Exercício:** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 - 2}{1 - 2x}$

20. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4 + x - 3x^2}{5 + 5x^2}$

21. Sejam a_n e b_m diferentes de 0.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

22. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x^3 - 2|}{3 - x^3}$

23. **Exercício:** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 - 2}{3 - x^3}$

24. **Exercício:** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|4 + x - 3x^2|}{5 + 5x^2}$

25. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

26. **Exercício:** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

27. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2-3x} - \sqrt{4x^2+8}\right)$

8. Assíntotas verticais e horizontais

Definição 8 (Assíntota vertical)**.** *Uma reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** do gráfico de uma função f se*

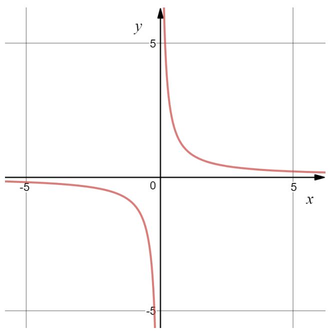
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \ \ e/\ ou \ \ \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Definição 9 (Assíntota horizontal)**.** *Uma reta $y = L$ é uma **assíntota horizontal** do gráfico de uma função f se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \;\; e/\,ou \;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Exemplos de assíntotas verticais e horizontais: Em cada item determine, caso existam, as assíntotas e/ou horizontais:

1. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Temos que $Dom(f) =$



- Assíntotas verticais:
- Assíntotas horizontais:

2. Seja $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+6x^2+12x+8}$. Temos que $Dom(f) =$
   - Assíntotas verticais:
   - Assíntotas horizontais:

3. **Exercício:** Seja $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.
4. **Exercício:** Seja $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-3}}{\sqrt{x^3-2x}}$.
5. **Exercício:** Seja $f(x) = tg(x)$.
6. **Exercício:** Seja $f(x) = arctg(x)$.
7. **Exercício:** Seja $f(x) = tgh(x)$.

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I e Cálculo Diferencial e Integral I - Professora: Mariana G. Villapouca

Limite e continuidade

Aula 16 - Limites fundamentais

9.Limites Fundamentais

Primeiro limite fundamental: $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1}$

Para uma demonstração acesse: `https://youtu.be/Ve99biD1KtA`.

Exemplos usando o primeiro limite fundamental: Calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos(x)}{x} =$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos(x)}{x^2} =$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} =$

4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(3x)}{x} =$

5. $\lim_{x \to 1} \dfrac{sen(x^2 - 1)}{x - 1} =$

6. **Exercício:** $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{sen(x^2 - 1)}{1 - cos(\sqrt{x^2 - 1})} =$

7. $\lim_{x \to 0} \dfrac{sen(3x) \cdot (1 - cos(7x)) \cdot tg^2(x)}{x^5} =$

Segundo limite fundamental: $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e}$

A demonstração pode ser vista no livro GUIDORIZZI, H., Um Curso de Cálculo, Vol. I, Livros Técnicos e Científicos Editora! E é uma da maneiras de se definir o número neperiano e.

Exemplos usando o segundo limite fundamental: Calcule os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

2. Seja $b \in \mathbb{R}$ constante. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{b}{x}\right)^{x} =$

3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+b} =$

4. **Exercício:** Se $2^a + 2^{a-1} = 192$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{ax} = L$. Determine $ln(L)$.

<u>**Terceiro limite fundamental:**</u> Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = ln(a)}$

Vejamos que o terceiro limite fundamental é uma consequência do segundo limite fundamental. Se fizermos a mudança de variável $t = a^x - 1$, teremos que $x = \dfrac{ln(t+1)}{ln(a)}$ e

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\left(\dfrac{ln(t+1)}{ln(a)}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{ln(a)\cdot t}{ln(t+1)} = ln(a)\cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}\cdot ln(t+1)} = ln(a)\cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} =$$

$$= ln(a)\cdot \frac{1}{ln\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)} = ln(a)\cdot \frac{1}{ln(e)} = ln(a)$$

Exemplos usando o terceiro limite fundamental: Calcule os seguintes limites:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

3. **Exercício:** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 5^x}{sen(2x) - sen(x)}$

4. **Exercício:** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{x+2} - 9}{e^x - 1}$