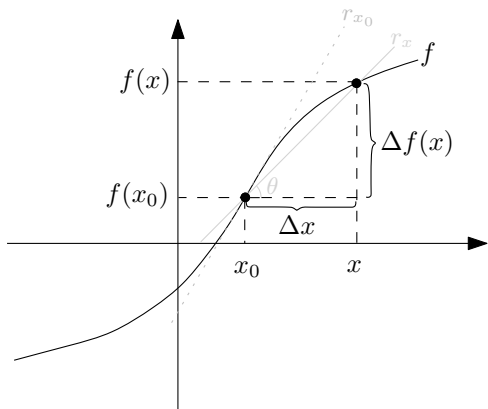


Derivada

Aula 17 - Definição da derivada

Taxa de variação: Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$.



$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$tg(\theta) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \text{coeficiente angular da reta } r_x$$

- **Taxa de variação média:** $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$
- **Coefficiente angular da reta tangente:** Quando $x \rightarrow x_0 \Rightarrow (x, f(x)) \rightarrow (x_0, f(x_0)) \Rightarrow$ coeficiente angular de r_x tende ao coeficiente angular de r_{x_0} , isto é,

$$\text{o coeficiente angular de } r_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{Equação da reta tangente } r_{x_0} : y - f(x_0) = (\text{coef. ang. de } r_{x_0}) \cdot (x - x_0)$$

- **Velocidade média e instantânea:** Seja $s(t)$ a função posição de uma partícula no instante t .

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Observe que se Δt for bem pequeno a velocidade média se aproxima da velocidade no instante t_0 , isto é,

$$\text{velocidade em } t_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Derivada de uma função

Definição 1. Sejam f uma função e $x_0 \in \text{Dom}(f)$. Definimos a derivada de f em x_0 como sendo

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

quando o limite acima existe e é finito.

Se f admite derivada em x_0 , então dizemos que f é derivável ou diferenciável em x_0 . Dizemos apenas que f é derivável ou diferenciável quando admite derivada em todos os pontos do seu domínio.

Observação 1. Como $f'(x_0)$ (quando existe) é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, então a equação de tal reta será

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

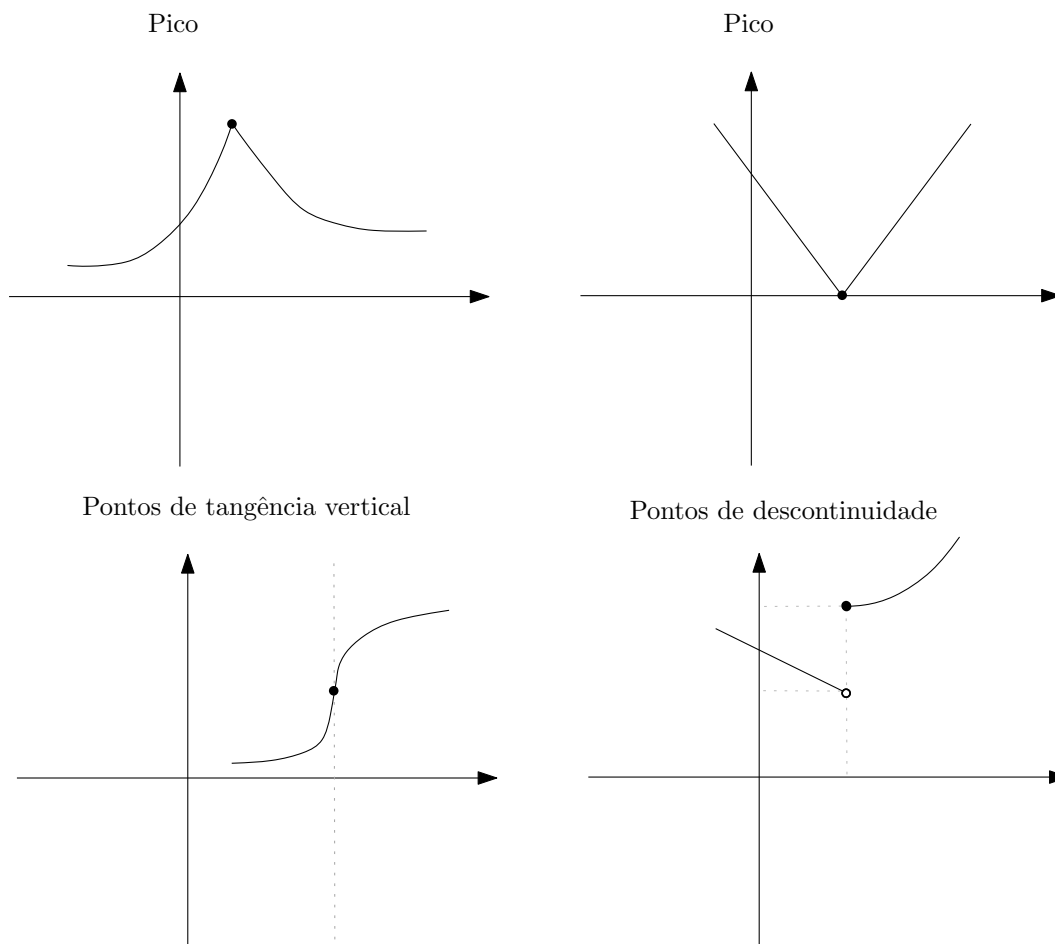
Definição 2 (Derivada nos extremos do intervalo). Seja uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável, então

- $f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$
- $f'(b) = f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(b - h) - f(b)}{-h}$

Observação 2 (Outras notações).

- $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = D_x(f(x))$
- Se $y = f(x)$, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Observação 3. Geometricamente, os pontos de diferenciabilidade de uma função f são aqueles onde a curva $y = f(x)$ tem uma reta tangente, e os pontos de não-diferenciabilidade são aqueles onde a curva não tem reta tangente. Intuitivamente, os pontos de não-diferenciabilidade mais comuns são:



Teorema 1 (Relação entre diferenciabilidade e continuidade). Se f é diferenciável em x_0 , então f é contínua em x_0 .

demonstração: Se f é diferenciável em x_0 , então existe

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \cdot \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} \cdot h = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Logo,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

isto é, f é contínua em x_0 .

■

Observação 4. *Nem toda função contínua é diferenciável!!!*

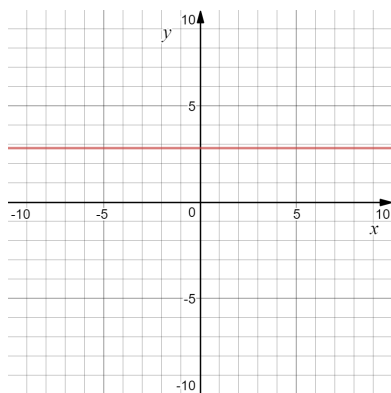
Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$, mas não é diferenciável em $x = 0$. (Verifique!)

Derivada

Aula 18 - Derivada das funções básicas

Derivadas das funções básicas:

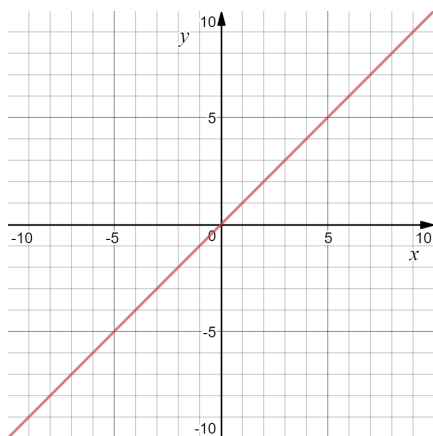
Função constante: Seja $f(x) = K$, onde $K \in \mathbb{R}$ é constante.



$$\begin{aligned} x_0 \in \text{Dom}(f) &= \\ f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{K - K}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\boxed{D_x(K) = 0, \forall x \in \mathbb{R}}.$

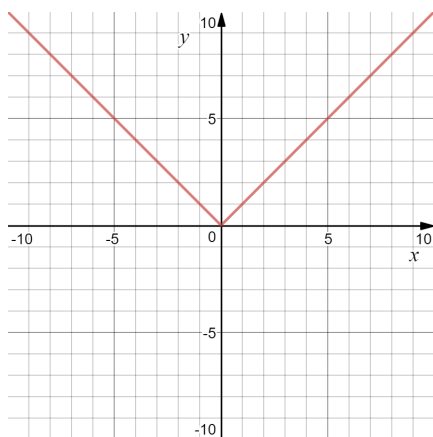
Função linear: Seja $f(x) = x$.



$$\begin{aligned} x_0 \in \text{Dom}(f) &= \\ f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Logo, $\boxed{D_x(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}}.$

Função modular: Seja $f(x) = |x|$.



$\text{Dom}(f) =$

Iremos separar a demonstração em 3 casos:

- $x_0 > 0$

- $x_0 < 0$

- $x_0 = 0$

Logo, $\boxed{D_x(|x|) = \frac{x}{|x|}, \forall x \neq 0}.$

Funções potência:

- $f(x) = x^2$

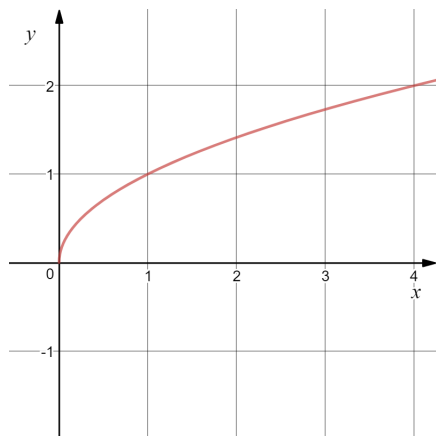
Logo, $\boxed{D_x(x^2) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}}$.

- $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$

Logo, $\boxed{D_x(x^n) = n \cdot x^{n-1}}$.

Exercício: Determine a equação da reta tangente ao gráfico da $f(x) = x^2$ no ponto $(1, f(1))$.

- Seja $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.



$$Dom(f) =$$

$$x_0 \in (0, +\infty)$$

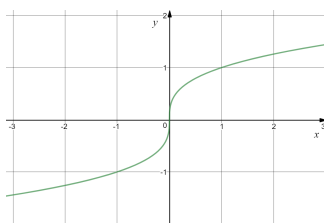
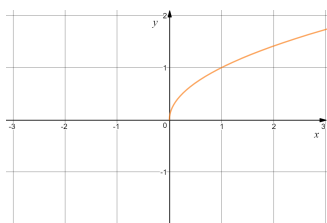
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} =$$

Agora, iremos analisar quando $x_0 = 0$ (caso em que o ponto está no extremo do domínio).

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x} =$$

$$\text{Logo, } \boxed{D_x(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}, \forall x \neq 0}.$$

- Seja $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ onde $n \in \mathbb{N}$.



$$x_0 \in \text{Dom}(f) - \{0\}.$$

$$\text{Logo, } \boxed{D_x(\sqrt[n]{x}) = D_x(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}, \forall x \neq 0}.$$

Pergunta: O que acontece quando $x_0 = 0$?

- Seja $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N}$.

$$x_0 \in Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$\text{Logo, } \boxed{D_x(x^{-n}) = -n \cdot x^{-n-1}, \forall x \neq 0}.$$

Exercício: Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Calcule, caso exista, $f'(0)$ e se possível encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f em $(0, f(0))$.

Exercício: Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Calcule, caso exista, $f'(0)$ e se possível encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f em $(0, f(0))$.

Derivada das funções logaritmo e exponencial

1. Sejam $f(x) = e^x$ e $x_0 \in \text{Dom}(f) =$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}.$$

Logo, $\boxed{D_x(e^x) = e^x}$.

Exercício: Determine a equação da reta tangente a f no ponto $(0, f(0))$.

2. Sejam $f(x) = \ln(x)$ e $x_0 \in \text{Dom}(f) =$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln\left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{x_0}}\right) = \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

Logo, $\boxed{D_x(\ln(x)) = \frac{1}{x}}$.

Derivada das funções seno e cosseno 1. Seja $f(x) = \text{sen}(x)$ e $x_0 \in \text{Dom}(f) =$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x_0 + h) - \text{sen}(x_0)}{h} =$$

Logo, $\boxed{D_x(\text{sen}x) = \cos(x)}$.

2. Seja $f(x) = \cos(x)$ e $x_0 \in \text{Dom}(f) =$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h} =$$

Logo, $\boxed{D_x(\cos x) = -\text{sen}(x)}$.

Propriedades da Derivada: Sejam f e g duas funções diferenciáveis em x_0 e $K \in \mathbb{R}$ uma constante.

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2. $(K \cdot f)'(x_0) = K \cdot f'(x_0)$

3. **Regra do Produto:** $\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)}$

$$4. \quad \boxed{\text{Regra do quociente: } \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{(g(x_0))^2} \text{ se } g(x_0) \neq 0}$$

demonstração:

$$\begin{aligned} 1. \quad (f+g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0) \\ 2. \quad (K \cdot f)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(Kf)(x) - (Kf)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Kf(x) - Kf(x_0)}{x - x_0} = K \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = K \cdot f'(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - g(x)f(x_0) + g(x)f(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

4. Primeiramente, usando a regra do produto, temos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) + f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)}$$

Agora, vamos calcular $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Portanto,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) + f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} = -f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} + \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) \cdot f'(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

■

Derivada das outras funções trigonométricas

$$1. \quad D_x(\operatorname{tg}(x)) = \sec^2(x)$$

2. **Exercício:** $D_x(\sec(x)) = \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)$
3. **Exercício:** $D_x(\operatorname{cosec}(x)) = -\operatorname{cosec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x)$
4. **Exercício:** $D_x(\operatorname{cotg}(x)) = -\operatorname{cosec}^2(x)$

Exemplo de derivada usando as propriedades: Calcule a derivada das seguintes funções:

1. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$
2. $f(x) = x^3 \sqrt{x} - x^2 |x| + e^x \cdot \operatorname{sen}(x) + \operatorname{tg}(x)$
3. $f(x) = \frac{x^3 + 6x^2}{2\sqrt{x}} + \ln(x)$

Derivada

Aula 19 - Derivadas laterais, regra da cadeia e derivadas de ordem superior

Derivadas laterais Para que uma função f seja diferenciável em x_0 devemos ter que as derivadas laterais abaixo existem e assumem o mesmo valor que será o valor de $f'(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Observação 5.

- *Note que se uma das derivadas laterais não existir ou se as derivadas laterais assumem valores distintos, temos que a função não será diferenciável no ponto onde isso acontece.*
- *Para calcular a derivada das funções que são definidas por partes devemos usar as derivadas laterais.*

Exemplos de derivada de funções definidas por partes:

1. Seja $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x), & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 2x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$. A função f é contínua em $x = 0$? A função f é diferenciável em $x = 0$?

2. Seja $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{se } x < 1 \\ 1 + ax + bx^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. Existem valores a e b de maneira que f seja diferenciável em $x = 1$?

Regra da Cadeia (derivada de uma composição de funções):

Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções diferenciáveis, com $Im(g) \subset Dom(f)$. Então $h(t) = f \circ g(t) = f(g(t))$ é diferenciável e sua derivada é

$$h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

Observação 6 (Regra da Cadeia com a notação de Leibniz). *Seja $y = f(x)$ e $x = g(t)$, então*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Exemplos de derivada de funções compostas (Regra da Cadeia): Calcule a derivada das seguintes funções.

1. $h(t) = (t^2 - t + 1)^{1000}$

2. $f(x) = \text{sen}(\cos(\sqrt{3x+1}))$

3. $g(x) = \text{sen}(\text{arctg}(x^2 + 1))$, sabendo que $D_x(\text{arctg}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$

4. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável onde $g(0) = \frac{1}{2}$ e $g'(0) = 1$. Calcule $f'(0)$, onde $f(x) = (\cos(x)) \cdot g^2\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{x^2 + 2}\right)\right)$.

5. Sejam $y = u \cdot \cos^2(u^3)$ e $u = u(t)$. Calcule $\frac{dy}{dx}$.

6. **Exercício:** Calcule a deriva acima quando $u = \ln(x)$.

Função derivada e derivadas de ordem superior: Seja f uma função e $A = \{x \in \operatorname{Dom}(f) \mid \exists f'(x)\}$.

Função derivada de f

(derivada de primeira ordem de f)

$\begin{array}{lll} f' : & A & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto f'(x) \end{array}$

A derivada da função f' , f'' , é a **derivada de segunda ordem de f** . E assim, $f^{(n)}$ é a **derivada de ordem n ou n-ésima derivada de f** .

Exemplos de derivadas de ordem superior:

1. Seja $f(x) = x^5 + 2x^2 + 5$. Calcule $f^{(n)}(x), \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Sejam $y = \cos(u)$ e $u = u(x)$. Calcule $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Diferenciação Implícita Dizemos que uma dada equação nas variáveis x e y define a função f **implicitamente** se para todo $x \in Dom(f)$ temos que $(x, f(x))$ é solução desta equação.

Nem toda função definida implicitamente por uma equação pode ser colocada em sua forma explícita. Por exemplo, a função $y = f(x)$ dada implicitamente por $xy^5 - 3x^2y + 4xy = 3$.

Mas para encontrar a derivada de uma função definida implicitamente não é preciso explicitar uma tal função, podemos simplesmente derivar a equação que a define usando a **Regra de Cadeia** para encontrar a sua derivada.

Exemplos de diferenciação implícita:

1. Dada uma equação $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$ que representa uma elipse, determine:
 - (a) os pontos da elipse onde a reta tangente é horizontal.
 - (b) os pontos da elipse onde a reta tangente é vertical.

2. *Exercício:* A equação $xy^5 - 3x^2y + 4xy = 3$ define implicitamente uma função $y = f(x)$. Encontre $f'(x)$.

3. Use a diferenciação implícita para encontrar $\frac{dy}{dx}$ se $5y^2 + \operatorname{sen} y = x^2$.

4. Supondo que $y = \operatorname{arctg}(x)$ é derivável em $\mathbb{R}$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

5. **Exercício:** Supondo que $y = \operatorname{arcsen}(x)$ é derivável em $(-1, 1)$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

Derivação Logarítmica Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo I onde $f(x) > 0, \forall x \in I$. Se definirmos

$$y = (f(x))^{g(x)}$$

como calcular $\frac{dy}{dx}$?

Primeiro iremos aplicar a função $\ln(x)$ em ambos os lados da igualdade para fazermos uso das propriedades do logaritmo

$$\ln(y) = \ln((f(x))^{g(x)}) = g(x) \cdot \ln(f(x))$$

Agora, derivando implicitamente a equação acima, obtemos

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = (f(x))^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x) \right)$$

Observação 7. *Uma outra maneira de olhar tal função:*

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

e usar a regra da cadeia para derivar

$$[(f(x))^{g(x)}]' = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))} \cdot [g(x) \cdot \ln(f(x))]'$$

Exemplos de derivação logarítmica: Calcule a derivada das seguintes funções:

1. $y = x^{\sqrt{x}}$
2. $y = (x^2 + 3x - 4)^{\ln x}$

Aula 21 - Teorema da Função Inversa

Teorema da Função Inversa Como determinar se uma função tem inversa?

Teorema 2. Uma função $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ é injetora se, e somente se, f é invertível, isto é, f possui inversa.

demonstração:

$(\Rightarrow)$: Como f é injetora, temos que se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Assim, se $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

$(\Leftarrow)$: Sejam $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$, então, aplicando f^{-1} em ambos os lados da igualdade, tem-se que $x_1 = x_2$. ■

Teorema 3. Uma função $f : \text{Dom}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ tem inversa se, e somente se, f é monótona, isto é, se para todo $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ com $x_1 < x_2$ tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$.

demonstração:

$(\Rightarrow)$: Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$, então f é monótona.

$(\Leftarrow)$: Se $x_1 \neq x_2$ então

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ou
 - $x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
-

Teorema 4 (da Função Inversa). Seja $f : I \rightarrow J$ onde $I \subset \text{Dom}(f)$ e $J = f(I)$ são intervalos. Se f é diferenciável em I e $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$, então f tem inversa f^{-1} . Além disso,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

demonstração: Sejam $x_1 < x_2$ em I , então $[x_1, x_2] \subset I$, daí temos que f é contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2) , logo, pelo Teorema do Valor Médio (que veremos nas próximas aulas), existe um $c \in (x_1, x_2) \subset I$ tal que $0 \neq f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, logo $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ ou $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, e como $x_2 - x_1 > 0$ teremos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou $f(x_2) - f(x_1) < 0$. Portanto, f é monótona em I e, pelo teorema acima, f é invertível em I .

Seja f^{-1} a função inversa de f em I , então $(f \circ f^{-1})(x) = x$, e derivando implicitamente esta equação obtemos que

$$\frac{d}{dx}(f \circ f^{-1})(x) = \frac{d}{dx}(x) \Rightarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

e assim, como $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$ teremos que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

■

Exemplos para encontrar a derivada de funções usando o Teorema da Função Inversa:

1. Seja $f(x) = x \cdot e^x$ com domínio $D = (-1, +\infty)$. Mostre que f é invertível em D , calcule $(f^{-1})'(e)$ e $(f^{-1})'(f(0))$.

2. Seja $f(x) = \text{sen}(x)$ com domínio $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Mostre que f é invertível em D e que

$$D_x(\arcsen(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

3. **Exercício:** Seja $f(x) = \cos(x)$ com domínio $D = (0, \pi)$. Mostre que f é invertível em D e que

$$D_x(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

4. Seja $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ com domínio $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Mostre que f é invertível em D e que

$$D_x(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

5. **Exercício:** Seja $f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{x^2+1}$. Prove que f é invertível em $\mathbb{R}$ e calcule $(f^{-1})'(f(0))$.