

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Lista 6: Derivada

Cálculo I - 04287 e 00508 - Professora: Mariana G. Villapouca

1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ em cada caso:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $x_0 = \sqrt{5}$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$

(b) $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$, $x_0 = 0$

(d) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$

2. Em cada caso, determine se f é contínua em $x = 1$ e se f é diferenciável em $x = 1$:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{2}, & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

3. Determine a e b de modo que $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ ax + b, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ seja diferenciável em $x = 1$.

4. Seja f uma função tal que $|f(x)| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. f é contínua em $x = 0$? f é diferenciável em $x = 0$?

5. Em cada caso, use o gráfico da função para determinar os valores de x em que a função é diferenciável e indique os valores de x em que a derivada é **(i)** nula (pontos críticos de f : candidatos a máximos e mínimos locais), **(ii)** positiva (onde a função é crescente) e **(iii)** negativa (onde a função é decrescente).

(a) $f(x) = |x + 3|$

(c) $f(x) = \sqrt{|x|}$

(b) $f(x) = |x^2 - 9|$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x \leq 0 \\ 4 - x^2, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

6. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{se } x < 0 \\ \text{sen}(x), & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Prove que f é contínua em $x = 0$, mas que f não é diferenciável em $x = 0$ utilizando as derivadas laterais.

7. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & \text{se } x < 1 \\ 1 + ax + bx^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. Determine a e b de maneira que f seja diferenciável. (Justifique a sua escolha através das derivadas laterais).

8. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} - 1, & \text{se } x \leq 1 \\ \text{arctg}(x), & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Caso, existam, calcule $f'(1)$ e $f''(1)$. (Dica: Use a Regra de L'Hôspital para calcular as derivadas laterais no ponto $x = 1$).

9. Considere $g(x) = (\cos(x)) \cdot f^2(x)$ onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável, $f(0) = -1$, $f'(0) = f''(0) = 2$. Calcule $g''(0)$.

10. Sejam $f(x) = \sqrt{2x+1}$ e $g(x) = \sqrt{\text{tg}(x)}$. Calcule $(f \circ g)' \left(\frac{\pi}{4} \right)$.

11. Prove que se f é diferenciável em x_0 , então f é contínua em x_0 .

12. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$. A função f é diferenciável em $x = 0$? A função f' é contínua em $x = 0$?

13. Seja $f(x) = \begin{cases} x \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. f é contínua em $x = 0$? f é diferenciável em $x = 0$?

14. Seja $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x^4}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Calcule $f'(x)$.

15. Sejam $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & \text{se } x < 1 \\ 2 - x^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ e $g(x) = \frac{x-1}{2}$.

(a) Determine $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$.

(b) Calcule $(f \circ g)'(x)$ e $(g \circ f)'(x)$.

16. Encontre a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) \cdot \text{tg}(x)$

(k) $f(x) = \text{sen}(\cos(x^2 + 1))$

(b) $f(x) = \cos^2(\sec(x))$

(l) $f(x) = \ln(|x|)$

(c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \text{sen}(x) + x^{\frac{1}{3}}$

(m) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)$

(d) $f(x) = 2x \cdot \cos(x) \cdot \text{tg}(x)$

(n) $f(x) = \text{tg}^{23}(x^2 + 1)$

(e) $f(x) = \frac{x \cdot \sec(x)}{x^2 + 2x + 3}$

(o) $f(x) = \sqrt{x^3 + \cos \sec(x)}$

(f) $f(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^4 + x^2 + 1}$

(p) $f(x) = (1 + x^5 \cot g(x))^{-8}$

(g) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 2)^{100}}$

(q) $f(x) = \sec(\sqrt{1 + \cos(x)})$

(h) $f(x) = |2x - 8|, x \neq 4$

(r) $f(x) = e^{\text{sen}(x^2+1)}$

(i) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{2x^4 + 2x}}{\cos^2(3x)}$

(s) $f(x) = \log_{10}(2 + \text{sen}(x))$

(j) $f(x) = \text{sen}(\cos(\sqrt{3x+1}))$

(t) $f(x) = \text{tgh}(\text{sen}(x))$

(u) $f(x) = \text{senh}(\ln(2x)) + \text{cosh}(\ln(2x))$

17. Prove que:

(a) $D_x(e^x) = e^x$

(d) $D_x(\log_a(x)) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

(b) $D_x(a^x) = a^x \cdot \ln(a)$

(e) $D_x(\text{sen}(x)) = \cos(x)$

(c) $D_x(\ln(x)) = \frac{1}{x}, x > 0$

(f) $D_x(\cos(x)) = -\text{sen}(x)$

(g) $D_x(\text{tg}(x)) = \sec^2(x)$

- (h) $D_x(\cot g(x)) = -\operatorname{cosec}^2(x)$ (k) $D_x(\operatorname{senh}(x)) = \operatorname{cosh}(x)$
 (i) $D_x(\sec(x)) = \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)$
 (j) $D_x(\operatorname{cossec}(x)) = -\operatorname{cossec}(x) \cdot \operatorname{cotg}(x)$ (l) $D_x(\operatorname{cosh}(x)) = \operatorname{senh}(x)$

18. Seja g uma função diferenciável. Encontre a derivada das funções abaixo:

- (a) $f(x) = e^{g(x)}$ (c) $f(x) = \cos(g(x))$ (e) $f(x) = (g(x))^n$
 (b) $f(x) = \ln(g(x))$ (d) $f(x) = \operatorname{sen}(g(x))$ (f) $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

19. Considere f uma função diferenciável e g definida por $g(x) = f^2(\cos(x))$. Sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = -\frac{1}{2}$, calcule $g'(\frac{\pi}{2})$.

20. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $g(0) = \frac{1}{2}$ e $g'(0) = 1$. Calcule $f'(0)$, onde

$$f(x) = (\cos(x)) \cdot g^2\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{x^2+2}\right)\right).$$

21. Sejam g diferenciável e $f(x) = x \cdot g(x^2)$.

- (a) Mostre que $f'(x) = g(x^2) + 2x^2 \cdot g'(x^2)$.
 (b) Calcule $g(4)$, sabendo que $g(4) + g'(4) = 1$ e $f'(2) = -1$.

22. Calcule f'' e seu respectivo domínio para $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

23. Seja $y = u \cdot \cos^2(u^3)$.

- (a) Calcule $\frac{dy}{du}$.
 (b) Se $u = u(x)$, calcule $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right]$.

24. Prove que se $y = \cos(\sqrt{x}) - \operatorname{sen}(\sqrt{x})$, então $4xy'' + 2y' + y = 0$.

25. Quantas retas tangentes ao gráfico de $y = x^3 + 3x$ são paralelas a reta $y = 6x + 1$? Determine as equações de tais retas tangentes.

26. Sejam f e g funções deriváveis tais que $g(x) = f(x \cdot \operatorname{arcsen}(x))$. Calcule $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ sabendo que $f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3$.

27. Seja $f(x) = x^{1/3}(x-1)^{2/3}$. Prove que $f'(x) = \frac{3x-1}{3(x-1)^{1/3}x^{2/3}}$ e que $f''(x) = -\frac{2}{9(x-1)^{4/3}x^{5/3}}$ e estude o sinal de f' e f'' .

28. Encontre os valores a , b e c para que os gráficos de $f(x) = x^2 + ax + b$ e $g(x) = \sqrt[3]{(x^3 - 2x)^2} + c$ se interceptem no ponto $(1, 2)$ e tenham a mesma reta tangente neste ponto.

29. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \leq f(x) \leq \frac{x^2 + 3}{2}$$

Se f é diferenciável em $x = 1$, determine $f(1)$ e $f'(1)$.

30. As curvas $y = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x^2 + \pi/2}{x^2 + 1}\right) + ax$ e $y = \sqrt{ax^2 + 6x + b}$ têm a mesma reta tangente no ponto $(0, 2)$. Quais são os valores de a e b ?