Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Cálculo I e Cálculo Diferencial I - Professora: Mariana G. Villapouca

Aplicações da Derivada

Aula 22 - Regra de L'Hôspital

Regra de L'Hôspital: Suponha que f e g sejam deriváveis e que $g'(x) \neq 0$ em $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ para algum $\delta > 0$. Se

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = 0} \text{ ou } \boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty}$$

então

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

se o segundo limite existir ou for $\pm\infty$.

Observação 1. *Esta regra também é válida para $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.*

demonstração:

Para provar a Regra de L'Hôspital, iremos precisar do seguinte resultado:

Teorema 1 (do Valor Médio de Cauchy)**.** *Se f e g são duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) onde $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

E a sua demonstração é bastante simples, basta aplicar o Teorema de Rolle na função $h(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$. (Verifique!)

Agora, vamos provar a Regra de L'Hôspital para o caso $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ e vamos supor que existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (os outros casos seguem de maneira análoga). Devemos mostrar que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Defina $F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a \end{cases}$ e $G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \neq a \\ 0, & \text{se } x = a \end{cases}$, note que existe um intervalo I contendo a onde f e g são contínuas em $I - \{a\}$, e portanto F e G serão contínuas em I.

Agora, seja $x \in I$ com $x > a$. Então F e G são contínuas em $[a, x]$ e deriváveis em (a, x) e ainda $G'(x) \neq 0$ em (a, x) (uma vez que $F' = f'$ e $G' = g'$ em (a, x)). Portanto, pelo Teorema do valor médio de Cauchy, existe $c \in (a, x)$ tal que

$$\frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

pois $F(a) = G(a) = 0$. Como $x \to a^+ \Rightarrow c \to a^+$ $(a < c < x)$, logo

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{c \to a^+} \frac{F'(c)}{G'(c)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

Analogamente, provamos que $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Portanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$\blacksquare$

Observação 2. *Para demonstrar o caso em que a é infinito, basta fazer a mudança de variável* $t = \frac{1}{x}$ *e assim quando* $x \to +\infty$ *temos que* $t \to 0^+$*, e daí*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(1/t) \cdot (-1/t^2)}{g'(1/t) \cdot (-1/t^2)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemplos:

1. $\lim_{x \to 1} \frac{ln(x)}{x - 1}$

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

3. **Exercício:** $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$

4. **Exercício:** $\lim_{x \to 0} \frac{tg(x) - x}{x^3}$

Veremos a seguir como tratar outros casos de indeterminação de maneira a cairmos no caso $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ onde podemos usar a Regra de L'Hôspital.

Produto indeterminado: $\boxed{0 \cdot \infty}$

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, então podemos reescrever:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)}$ (estaremos no caso $\dfrac{0}{0}$)
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)}$ (estaremos no caso $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Exemplos:

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot ln(x)$

2. **Exercício:** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \cdot ln(x)$

Diferença indeterminada: $\boxed{\infty - \infty}$ (em cada caso tentar transformar em um quociente onde recai em $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Exemplo: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (sec(x) - tg(x))$

Potências indeterminadas: $\boxed{0^0, \infty^0 \text{ e } 1^\infty}$

Sejam $f(x) > 0$ e $g(x)$ tais que $[f(x)]^{g(x)}$ está bem definida.

- $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

Usaremos um dos dois métodos abaixo para recairmos no caso $0 \cdot \infty$:

Fazendo $y = [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow ln(y) = g(x) \cdot ln(f(x))$, temos

$$\boxed{\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} ln(y)} = e^{\lim_{x\to a} g(x) \cdot ln(f(x))}}$$

Fazendo $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \cdot ln(f(x))}$, temos

$$\boxed{\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x) \cdot ln(f(x))} = e^{\lim_{x\to a} g(x) \cdot ln(f(x))}}$$

Exemplos:

1. $\lim_{x\to 0^+} (1 + sen(2x))^{\frac{1}{x}}$

2. $\lim_{x\to 0^+} x^x$

3. **Exercício:** $\lim_{x\to +\infty} (e^x + 7)^{\frac{1}{x}}$