

Lista 4: Limite e continuidade

Cálculo Dif. e Int. II - IME 01 - 00854 - Professora: Mariana G. Villapouca

1. Calcule os seguintes limites quando existirem. Caso contrário, justifique.

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x^2 + y^2 + 2}$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$$

$$(d) \lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{s^2 - t^2}{s^2 + t^2}$$

$$(e) \lim_{(u,v) \rightarrow (1,1)} \frac{u^2 - 2u + 1}{u^2 - v^2 - 2u + 2v}$$

$$(f) \lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{s^3 - t^3}{s^2 + t^2}$$

$$(g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1}{x^2 + y - 1}$$

$$(h) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1) \cdot y^2}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$(j) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - y^2)}{x + y}$$

$$(k) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{1}{x^2 + y^2}} (x^2 + y^2)$$

$$(l) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(x+1) + (y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$(m) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

$$(n) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

$$(o) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(p) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4 + y^4}$$

$$(q) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(r) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$(s) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$$

$$(t) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$(u) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y + z^2}{x^4 + y^2 + z^3}$$

$$(v) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 \cdot z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(w) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 y}{3x^2 + 3y^2}$$

$$(x) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

2. Verifique que:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(\sqrt{xy})}{x} = 0$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})} = 2$$

3. Prove que os seguintes limites não existem.

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y}$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 - y^2}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{y - x^3}$$

4. Em cada item abaixo, determine o conjunto de todos os pontos onde f é contínua.

$$(a) \ f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$$

$$(b) \ f(x, y) = x^3 + y^2 + xy$$

$$(c) \ f(x, y) = \operatorname{arctg}((x + y)^{-2})$$

$$(d) \ f(x, y) = \cos(\sqrt{1 + x - y})$$

$$(e) \ f(x, y, z) = \frac{\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)}{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$$

$$(f) \ f(x, y, z) = \sqrt{2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$$(g) \ f(x, y) = \ln\left(\frac{x - y}{x^2 + y^2}\right)$$

$$(h) \ f(x, y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$$

$$(i) \ f(x, y) = \frac{x - y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$(j) \ f(x, y, z) = \operatorname{arc sen}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$(k) \ f(x, y, z) = \ln(z) \cdot \sqrt{y - x^2}$$

$$(l) \ f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(m) \ f(x, y) = \begin{cases} \frac{x - 3y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(n) \ f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. Considere $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

(a) Mostre que f é contínua quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo dos caminhos $y = mx$.

(b) Mostre, entretanto, que f não é contínua em $(0, 0)$.

6. Em cada item, determine o valor de a para que f seja contínua em $(0, 0)$.

$$(a) \ f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(b) \ f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{y^2 + 1} - 1} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ a - 4 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$