**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

**Lista 5: Derivadas parciais e diferenciabilidade**

**Cálculo Dif. e Int. II - IME 01 - 00854 - Professora: Mariana G. Villapouca**

1. Determine as derivadas parciais das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = (x^3 + y^3)(x - y)$

   (b) $f(x, y) = sen(x + y) + cos(x - y)$

   (c) $f(x, y) = arcsen\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)$

   (d) $f(x, y) = \int_x^y cos(t)dt$

   (e) $f(x, y) = \int_x^y e^{-t^2}dt$

   (f) $f(x, y, z) = \dfrac{e^x}{e^y - e^z}$

   (g) $f(x, y, z) = (y^2 + z^2)^x$

   (h) $f(r, s, v) = (2r + 3s)^{cos(v)}$

2. Calcule as derivadas parciais da seguintes funções nos pontos indicados:

   (a) $f(x, y) = ln(x \cdot tg(y))$ e $P = (3, \frac{\pi}{4})$

   (b) $f(x, y) = \int_x^{x^2+y^2} e^t dt$ e $P = (1, 2)$

   (c) $f(x, y) = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$ e $P = (1, 3)$

3. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

   (a) Mostre que não existe uma das derivadas parciais em $(0, 0)$.

   (b) Mostre que $f$ não é contínua em $(0, 0)$ e portanto não é diferenciável em $(0, 0)$.

4. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   (a) Mostre que existe as derivadas parciais em $(0, 0)$.

   (b) Mostre que $f$ não é contínua em $(0, 0)$ e portanto não é diferenciável em $(0, 0)$.

5. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   (a) Mostre que existe as derivadas parciais em $(0, 0)$.

   (b) Mostre que $f$ é contínua em $(0, 0)$.

   (c) Mostre que $f$ não é diferenciável em $(0, 0)$.

6. Seja $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot sen\left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   (a) Calcule $f_x$ e $f_y$.

   (b) Mostre que $f_x$ e $f_y$ não são contínuas em $(0, 0)$.

   (c) Mostre que $f$ é diferenciável em $(0, 0)$.

   (d) Mostre que $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

7. A função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é de classe $C^1$ em $\mathbb{R}^3$?

8. A função $f(x, y, z) = ln(1 - x - y - z)$ é de classe $C^1$ em seu domínio?

9. Mostre que as seguintes funções são diferenciáveis em seus domínios:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^3-y^3)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

10. Determine o conjunto de todos os pontos onde $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é diferenciável.

11. Se $f(x,y) = arctg(x-2y)$, determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f$ no ponto $(2,1,f(2,1))$.

12. Seja $f(x,y) = x \cdot cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Mostre que os planos tangentes ao gráfico de $f$ contém a origem.

13. Encontre os pontos onde o plano tangente é horizontal em cada uma das superfícies abaixo:

(a) $z = 2x^2 + 2xy - y^2 - 5x + 3y - 2$ (b) $z = x^2y^2 + 2(x-y)$

14. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy + 4x + 2$ que é paralelo ao plano $xy$.

Seja $f$ uma função diferenciável em $(a,b)$. A função

$$T(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

é chamada de ***lineariazação de** $f$ **em*** $(a,b)$, e a aproximação

$$f(x,y) \approx T(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

é chamada de ***aproximação linear*** ou ***aproximação pelo plano tangente de** $f$ **em*** $(a,b)$.

15. Seja $f(x,y) = x \cdot e^{x^2-y^2}$. Calcule um valor aproximado para $f(x,y)$ quando $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

16. Calcule um valor aproximado para $\sqrt{(0,01)^2 + (3,98)^2 + (2,99)^2}$.

17. Calcule as derivadas parciais indicadas:

(a) $f(x,y) = y^2z + sen(x^2z)$; $f_{xz}$ e $f_{yzx}$. (b) $f(x,y,z) = ln(x^2 + 8y - 3z^2)$; $f_{xx}$ e $f_{zy}$.

18. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Explique porque isso não contradiz o Teorema de Clairaut.

19. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Use um recurso computacional para visualizar o gráfico de $f$.

(b) Determine $f_x$ e $f_y$ para $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) Determine $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

(d) Mostre que $f_{xy}(0,0) = -1$ e $f_{yx}(0,0) = 1$.

(e) O resultado encontrado em (d) contradiz o Teorema de Clairaut?

20. Se $f(x,y) = ln(x-y) + tg(x+y)$, mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Uma função $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ é ***harmônica*** se satisfaz as ***equações de Laplace***

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = 0$$

21. Mostre que as seguintes funções são harmônicas:

(a) $f(x,y) = x^2 - 3xy^2$

(b) $f(x,y) = e^x sen(y)$

(c) $f(x,y) = ln(x^2 + y^2)$

(d) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$

22. Verifique se as seguintes funções satisfazem ou não as equações de Laplace:

(a) $f(x,y) = ln(\sqrt{x^2 + y^2})$

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

(c) $f(x,y) = y^3 + 3x^2 y$

(d) $f(x,y,z) = e^x sen(y) + e^y sen(z)$

(e) $f(x,y) = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(f) $f(x,y) = ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$

23. Utilize a regra da cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas:

(a) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $x = ln(t)$, $y = cos(t)$; $\dfrac{dz}{dt}$.

(b) $z = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{-t}$; $\dfrac{dz}{dt}$.

(c) $w = xe^{\frac{y}{z}}$, $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$; $\dfrac{dw}{dt}$.

(d) $z = e^{x+2y}$, $x = \dfrac{s}{t}$, $y = \dfrac{t}{s}$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

(e) $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + w^3$, $y = u + ve^w$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, $\dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2$, $v = 1$ e $w = 0$.

(f) $w = xy + yz + zx$, $x = rcos(\theta)$, $y = rsen(\theta)$, $z = r\theta$; $\dfrac{\partial w}{\partial r}$, $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ quando $r = 2$ e $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

(g) $u = x^4 y + y^2 z^3$, $x = rse^t$, $y = rs^2 e^{-t}$, $z = r^2 sen(t)$; $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ quando $r = 2$, $s = 1$ e $t = 0$.

24. Seja $z = f(e^{-u}, e^u)$ onde $f(x,y)$ é uma função diferenciável dada. Expresse $\dfrac{dz}{du}$ em termos das derivadas parciais de $f$.

25. Seja $z = f(u^2 + v^2, uv)$ onde $f(x,y)$ é uma função diferenciável dada. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de $f$.

26. Se $f(x,y) = e^{xy}$, $g(t) = cos(t)$, $h(t) = sen(t)$ e $F(t) = f(g(t), h(t))$, calcule $F'(0)$.

27. (a) Verifique que o ponto $(0, \sqrt[3]{4})$ satisfaz a equação $y^3 + xy + x^3 = 4$.

(b) Use o Teorema da função implícita para garantir que existe alguma função diferenciável $y = y(x)$ definida implicitamente por $y^3 + xy + x^3 = 4$.

(c) Determine $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de $x$ e $y$.

28. Em cada caso, temos que existe uma função $y = y(x)$ que é diferenciável e que é dada implicitamente pela equação indicada. Determine $\dfrac{dy}{dx}$.

    (a) $ycos(x) = x^2 + y^2$

    (b) $arctg(x^2y) = x + xy^2$

    (c) $cos(xy) = 1 + sen(y)$

    (d) $e^y sen(x) = x + xy$

29. Em cada caso, temos que existe uma função $z = z(x, y)$ que é diferenciável e que é dada implicitamente pela equação indicada. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

    (a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

    (b) $e^z = xyz$

    (c) $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

    (d) $yz + xln(y) = z^2$

30. Determine a equação de um plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico da função $f(x, y) = x^2 + xy$.