Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Lista 6: Derivada direcional e vetor gradiente

Cálculo Dif. e Int. II - IME 01 - 00854 - Professora: Mariana G. Villapouca

1. Determine o gradiente de $f(x,y,z) = x^2 \cdot e^{yz^2}$.

2. Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada em cada item:

   (a) $f(x,y) = x^2e^{-y}$, $(-2,0)$, na direção do ponto $(2,-3)$

   (b) $f(x,y,z) = x^2y + x\sqrt{1+z}$, $(1,2,3)$, na direção de $v = 2i + j - k$.

   Se o vetor unitário u faz um ângulo θ com o eixo x positivo, então podemos escrever $u = (cos(\theta), sen(\theta))$ e
   $$D_uf(x,y) = f_x(x,y)cos(\theta) + f_y(x,y)sen(\theta)$$

3. Encontre a derivada direcional $D_uf(x,y)$ se $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ e u é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$. Calcule $D_uf(1,2)$.

4. Encontre a derivada direcional $D_uf(x,y)$ se $f(x,y) = ye^{-x}$ e u é o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Calcule $D_uf(0,4)$.

5. Seja $f(x,y,z) = xsen(yz)$.

   (a) Determine o gradiente de f.

   (b) Determine a derivada direcional de f em $(1,3,0)$ na direção de $v = i + 2j - k$.

6. Em cada item, determine o gradiente de f e a taxa de variação de f em P na direção do vetor u:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$, $P = (1,2)$ e $u = \dfrac{1}{3}(2i + \sqrt{5}j)$.

   (b) $f(x,y,z) = xe^{2yz}$, $P = (3,0,2)$ e $u = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

   (c) $f(x,y) = e^x sen(y)$, $P = (0,\pi/3)$ e $u = (-6,8)$.

   (d) $f(r,s) = arctg(rs)$, $P = (1,2)$ e $u = 5i + 10j$.

   (e) $f(x,y,z) = \sqrt{xyz}$, $P = (3,2,6)$ e $u = (-1,-2,2)$.

   A **segunda derivada direcional de** $f(x,y)$ na direção do vetor unitário u é definida como
   $$D_u^2f(x,y) = D_u[D_uf(x,y)].$$

7. Se $f(x,y) = x^3 + 5x^2y + y^3$ e $u = (3/5, 4/5)$, calcule $D_u^2(2,1)$.

8. Em cada caso, determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre:

   (a) $f(x,y) = 4y\sqrt{x}$, $(4,1)$

   (b) $f(s,t) = te^{st}$, $(0,2)$

   (c) $f(x,y) = sen(xy)$, $(1,0)$

   (d) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $(3,6,-1)$

   (e) $f(x,y,z) = arct(xyz)$, $(1,2,1)$

9. Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função $f(x,y) = x^2+y^2-2x-4y$ é $i + j$.

10. Determine a taxa máxima de variação de $f(x,y) = x^2y + \sqrt{y}$ no ponto $(2,1)$. Em que direção isso ocorre?

11. Seja $u = (a, b)$ um vetor unitário. Calcule $D_u(0, 0)$ em cada caso:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

12. A temperatura do ar em pontos do espaço é dada pela função $T(x, y, z) = x^2 - y^2 = z^2$. Um mosquito localizado em $(1, 2, 1)$ deseja esfriar-se o mais rápido possível. Em que direção ele deve voar?

13. Em que direção se deve seguir, começando da origem, para obter a taxa mais ráída de decrescimento da função $f(x, y, z) = (2 - x - y)^2 + (3x + 2y - z+)^2$?

14. A temperatura de um chapa plana é dada por $T(x, y) = x^2 + y^2$. A partir do ponto $P = (3, 4)$ determine:

    (a) o gradiente da temperatura;
    (b) a direção em que a temperatura cresce o mais rápido possível e a taxa desse crescimento;
    (c) a direção em que a temperatura decresce o mais rápido possível e a taxa desse decrescimento;
    (d) $D_uT(3, 4)$ onde o vetor unitário u faz um ângulo de $\pi/6$ com o gradiente de T em $(3, 4)$.

15. Encontre a equação do plano tangente e da reta normal em cada superfície dada no ponto indicado.

    (a) $y = x^2 - z^2$, $(4, 7, 3)$
    (b) $xyz^2 = 6$, $(3, 2, 1)$
    (c) $xy + yz + zx = 5$, $(1, 2, 1)$
    (d) $x + y + z = e^{xyz}$, $(0, 0, 1)$