Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Lista 8: Integral dupla e Integral tripla

Cálculo Dif. e Int. II - IME 01 - 00854 - Professora: Mariana G. Villapouca

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 y(x-y^2)^4\,dxdy$

(b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\pi} rsen^2(\theta)\,d\theta dr$

(c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x+y}\,dxdy$

(d) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\pi/2} xsen(y)\,dydx$

(e) $\displaystyle\int\int_R \frac{xy^2}{x^2+1}\,dxdy$ onde $R=[0,1]\times[-3,3]$

(f) $\displaystyle\int\int_R \frac{1+x^2}{1+y^2}\,dxdy$ onde $R=[0,1]\times[0,1]$

(g) $\displaystyle\int\int_R ye^{-xy}\,dxdy$ onde $R=[0,2]\times[0,3]$

(h) $\displaystyle\int\int_R \frac{1}{x+y+z}\,dxdy$ onde $R=[1,3]\times[1,2]$

(i) $\displaystyle\int\int_R ysen(xy)\,dxdy$ onde $R=[1,2]\times[0,\pi]$

(j) $\displaystyle\int_1^2\int_1^x \frac{x^2}{y^2}\,dydx$

2. Esboce a região de integração e calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int\int_D xy^3\,dxdy$ onde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2x\}$

(b) $\displaystyle\int\int_D ysen(x)\,dxdy$ onde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ |x|\leqslant \pi/2, 0\leqslant y\leqslant cos(x)\}$

3. Esboce a região de integração e inverta a ordem das integrais iteradas em cada caso:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^y f(x,y)\,dxdy$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$

(d) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{3x} f(x,y)\,dydx$

4. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_{2y}^2 4e^{x^2}\,dxdy$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 sen(y^2)\,dydx$

(c) $\displaystyle\int_1^5\int_x^5 \frac{y}{xln(y)}\,dydx$

(d) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \frac{sen(y)}{y}\,dydx$

5. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\displaystyle\int\int_D \sqrt{1-y^2}\,dxdy$ onde D é a região limitada por $x^2+y^2=1$ no primeiro quadrante.

(b) $\displaystyle\int\int_D (x+y)^2\,dxdy$ onde D é a região limitada por $y=x$, $2y=x+2$ e o eixo y.

(c) $\displaystyle\int\int_D \frac{x-y}{x+y}\,dxdy$ onde D é a região compreendida pelas retas $x-y=0$, $x-y=1$, $x+y=1$ e $x+y=3$.

(d) $\displaystyle\int\int_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ onde D é a região contida na circunferência $x^2+y^2=1$.

(e) $\displaystyle\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$ onde D é o disco centrado fora da origem, dado pela desigualdade $x^2+y^2 \leqslant 2y$.

(f) $\displaystyle\int\int_D cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\ dxdy$ onde D é a região limitada pela curva $y+x=1$ e pelos eixos coordenados.

(g) $\displaystyle\int\int_D xy\ dxdy$ onde D é a região limitada pelas curvas $y=2x$, $y=x$, $y=2x-2$ e $y=x+1$.

(h) $\displaystyle\int\int_D \frac{y+2x}{(y-2x)^2}\ dxdy$ onde D é a região limitada pelas curvas $y-2x=2$, $y+2x=2$, $y-2x=1$ e $y+2x=1$.

(i) $\displaystyle\int\int_D (x+y)^2e^{x-y}\ dxdy$ onde D é a região limitada pelas curvas $y+x=1$, $y+x=4$, $x-y=-1$ e $x-y=1$.

(j) $\displaystyle\int\int_D ln(x^2+y^2)\ dxdy$ onde D é aregião limitada pelas curvas $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

(k) $\displaystyle\int\int_D e^{(y-x)/(y+x)}\ dxdy$ onde D é a região triangular limitada pela reta $x+y=2$ e pelos eixos coordenados.

6. Calcule, usando a integral dupla, a área da região D em cada item:

(a) D é a região plana limitada pelas curvas $y=x^2$ e $y=4x-x^2$.

(b) D é a região limitada pela curva fechada $(2x-4y+7)^2+(x-5y)^2=16$.

7. Calcule, usando a integral dupla, o volume dos seguintes sólidos:

(a) S é o sólido que se encontra abaixo do paraboloide hiperbólico $z=3y^2-x^2+2$ e acima do retângulo $R=[-1,1]\times[-2,2]$.

(b) S é o sólido que é limitado pelo paraboloide elíptico $x^2+2y^2+z=16$, pelos planos $x=2$, $y=2$ e pelos eixos coordenados.

(c) S é o sólido limitado por $y-x+z=1$ e pelos planos coordenados.

(d) S é o sólido limitado por $z=2x+1$, $x=y^2$ e $x-y=2$.

(e) S é o sólido que está acima do plano xy e é limitado por $z=x^2+4y^2$ e $x^2+4y^2=4$.

(f) S é o sólido limitado por $z-xy=0$, $z=0$, $y=x^2$ e $y^2-x=0$.

(g) S é o sólido limitado pelas superfícies $z=1-y^2$, $z\geqslant 0$, $x=0$, $z=0$ e $x-y=2$.

(h) S é o sólido limitado pelo paraboloide $z=4-x^2-y^2$ e pelo plano xy.

(i) S é o sólido no interior da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e do cilindro $x^2+(y-1)^2=1$ e acima do plano $z=0$.

(j) S é o tetraedro limitado pelos planos $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$ e $z=0$.

(k) S é o sólido que está abaixo do paraboloide $z=x^2+y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2+y^2=2x$.

8. Calcule, as integrais duplas, transformando-as em coordenadas polares:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\ dydx$ (b) $\displaystyle\int_0^3\int_x^{\sqrt{18-x^2}} sen(x^2+y^2+1)\ dydx$

9. Determine a área da parte do paraboloide $z=x^2+y^2$ que está abaixo do plano $z=9$.

10. Calcule as integrais triplas:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dzdydx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2+y^2)\ dzdydx$

11. Calcule, usando a integral tripla, o volume dos seguintes sólidos:

(a) W é o sólido no primeiro octante, limitado pelos gráficos das equações $y^2+z^2=4$, $x+y=2$, $z=0$, $y=0$ e $x=0$.

(b) W é o sólido que fica acima do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e abaixo da esfera $x^2+y^2+z^2=z$.

(c) W é o sólido limitado pelas superfícies $z=-y$, $y=x^2-1$ e $z=0$.

(d) W é o sólido limitado pelas superfícies $z=y^2$, $z=2-y^2$, $x=0$ e $x+z=4$.

(e) W é o sólido limitado pelas superfícies $z+x^2=4$, $y+z=4$, $y=0$ e $z=0$.

(f) W é o sólido limitado pelo paraboloide $z=x^2+y^2$ e pelo plano $z=4$.

(g) W é o sólido limitado pelo paraboloide $z=x^2+y^2$, pelo cilindro $x^2+y^2=4$ e pelo plano xy.

12. Expresse a integral tripla $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^4 \sqrt{1+x^2+y^2}\ dzdydx$ em coordenadas cilíndricas e calcule a integral obtida.

13. Expresse cada integral tripla em coordenadas esféricas e calcule a integral obtida:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dzdydx}{1+x^2+y^2+z^2}$ (b) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} xz\ dzdydx$

14. Calcule as seguintes integrais triplas:

(a) $\displaystyle\iiint_W z\ dxdydz$ onde W é o tetraedro sólido limmitado pelos 4 planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ e $x+y+z=1$.

(b) $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+z^2}\ dxdydz$ onde W é a região limitada pelo paraboloide $y=x^2+y^2$ e pelo plano $y=4$.

(c) $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\ dxdydz$ onde W está contido no cilindro $x^2+y^2=1$, abaixo do plano $z=4$ e acima do paraboloide $z=1-x^2-y^2$.

(d) $\displaystyle\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ dxdydz$ onde $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$.

(e) $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\ dxdydz$ onde W é a região contida dentro do cilindro $x^2+y^2=4$ e entre os planos $z=1$ e $z=4$.

(f) $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dxdydz$ onde W é limitado inferiormente pelo cone $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ e superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$.

(g) $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\ dxdydz$ onde W é a região interior ao cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, limitada superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e inferiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

(h) $\displaystyle\iiint_W z^2\ dxdydz$ onde W é inferior ao cone $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ e limitado pela esfera $x^2+y^2+(z-1)^2=1$.